

Απαντήσεις Θεμάτων – Λύσεις Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1ο Κρούσεις

Κεφάλαιο 2ο Μηχανική στερεού σώματος

Θέματα Επανάληψης

Κεφάλαιο 1ο: Κρούσεις

ΘΕΜΑΤΑ Α

Α. Θέματα πολλαπλής επιλογής

20. β	21. α	22. δ	23. γ	24. γ	25. δ	26. α	27. γ	28. δ
29. γ	30. γ	31. α	32. δ	33. δ	34. α	35. β	36. γ	37. α
38. γ	39. δ	40. γ	41. α	42. β	43. α	44. δ	45. α	46. δ
47. β	48. δ	49. α	50. β	51. β	52. β	53. β	54. γ	55. β
56. γ	57. γ	58. γ	59. δ	60. δ	61. γ	62. α	63. δ	64. δ
65. δ	66. γ	67. α	68. δ	69. δ				

Β. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

70.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
71.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
72.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	
73.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
74.	α. Λ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
75.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Λ
76.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ
77.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
78.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
79.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
80.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
81.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Λ
82.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ

ΘΕΜΑΤΑ Β

83. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση και $\bar{v}'_1$, $\bar{v}'_2$ οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά την κρούση.

Η ενέργεια $E_{\text{μετ}}$ που μεταβιβάζεται από τη Σ_1 στη Σ_2 κατά την κρούση ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της Σ_2 . Επομένως:

$$E_{\text{μετ}} = \Delta K_2 = K_{2(\text{μετά})} - K_{2(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα Σ_2 κατά την κρούση

$$\text{είναι: } \pi = \frac{E_{\text{μετ}}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\%.$$

84. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_1$ του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -\frac{v_1}{2}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\left| \frac{v_1^2}{4} - v_1^2 \right|}{v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 75\%.$$

85. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

$$\text{Έχουμε: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } -\frac{v_1}{4} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } m_1 + m_2 = -4(m_1 - m_2)$$

$$\text{ή } m_1 + m_2 = -4m_1 + 4m_2$$

$$\text{ή } 5m_1 = 3m_2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{5}.$$

86. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση δίνονται από τους τύπους: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ (1)

$$\text{και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Ισχύει $v'_2 = -v'_1$ ή, λόγω των σχέσεων (1) και

$$(2): \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } 2m_1 = m_2 - m_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 3m_1 \quad (3).$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } \pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\%$$

ή λόγω της σχέσης (3): $\pi = 75\%$.

87. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση και $\vec{v}_2'$ η ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε: $K_{2(\text{μετά})} = K_{1(\text{πριν})}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή } m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 = m_1 v_1^2$$

$$\text{ή } \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1$$

$$\text{ή } m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = 4m_1 m_2$$

$$\text{ή } m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 = 0 \quad \text{ή } (m_1 - m_2)^2 = 0$$

$$\text{ή } m_1 = m_2.$$

88. Σωστή επιλογή είναι η β .

$$\text{Έχουμε } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1' = -\frac{v_1}{3} \quad (1).$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$ ή, αλγεβρικά: $\Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1$ ή, λόγω της σχέσης (1): $\Delta p_1 = -\frac{4}{3} m_1 v_1$ ή $|\Delta p_1| = \frac{4}{3} m_1 v_1$ (2).

Το μέτρο της μέσης δύναμης F που ασκείται

στη σφαίρα Σ_1 από τη σφαίρα Σ_2 κατά τη διάρκεια της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = \frac{|\Delta p_1|}{\Delta t} \quad \text{ή, λόγω της (2): } F = \frac{4m_1 v_1}{3\Delta t}.$$

89. Σωστή επιλογή είναι η β .

Έστω v_1 και v_1' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση με το σώμα Σ_2 . Έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1' = -0,6v_1 \quad (1).$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{K_{1(\text{μετά})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή, λόγω της σχέσης}$$

$$(1): \pi = 36\%.$$

90. Σωστή επιλογή είναι η α .

Έστω $\vec{v}_A$ η ταχύτητα της σφαίρας Α ακριβώς πριν από την κρούση και $\vec{v}_B'$ η ταχύτητα της σφαίρας Β αμέσως μετά την κρούση.

Το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από τη σφαίρα Α στη σφαίρα Β κατά την κρούση είναι ίσο με το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α ακριβώς πριν από την κρούση που μεταφέρθηκε στη σφαίρα Β κατά την κρούση. Το ποσοστό αυτό γίνεται μέγιστο, όταν είναι ίσο με 100%. Επο-

$$\text{μένως: } \pi = \frac{\Delta K_B}{K_{A(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \frac{K_{B(\text{μετά})}}{K_{A(\text{πριν})}} \cdot 100\% = 100\%$$

$$\begin{aligned} \text{ή } K_{B(\text{μετά})} &= K_{A(\text{πριν})} \quad \text{ή } \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \\ \text{ή } m_B \left(\frac{2m_A v_A}{m_A + m_B} \right)^2 &= m_A v_A^2 \\ \text{ή } 4m_A m_B &= (m_A + m_B)^2 \\ \text{ή } (m_A - m_B)^2 &= 0 \quad \text{ή } m_A = m_B. \end{aligned}$$

91. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) Π_1 της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μεταβιβάζεται στο ακίνητο σώμα Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $\Pi_1 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\%$

(βλ. Μεθοδολογία B2).

Έστω ότι η σφαίρα Σ_2 κινούμενη με ταχύτητα $\bar{v}_2$ συγκρούεται ελαστικά με την ακίνητη σφαίρα Σ_1 . Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) Π_2 της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση που μεταβιβάζεται στο σώμα Σ_1 κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{\Delta K_1}{K_{2(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή } \Pi_2 = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \\ \text{ή } \Pi_2 &= \frac{m_1 \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \right)^2}{m_2 v_2^2} \cdot 100\% \\ \text{ή } \Pi_2 &= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\%. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ισχύει: $\Pi_1 = \Pi_2$.

92. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω v_1' και v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα

αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} s_2 &= 4s_1 \quad \text{ή } |v_2'| \Delta t = 4|v_1'| \Delta t \quad \text{ή } |v_2'| = 4|v_1'| \\ \text{ή } v_2' &= -4v_1' \quad \text{ή } \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = -4 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ \text{ή } 2m_1 &= 4m_2 - 4m_1 \quad \text{ή } 6m_1 = 4m_2 \\ \text{ή } m_2 &= 1,5m_1 \quad (1). \end{aligned}$$

Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_2 &= \bar{p}_{2(\text{μετά})} - \bar{p}_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή } \Delta p_2 = m_2 v_2' - 0 \\ \text{ή } \Delta p_2 &= m_2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή, λόγω της (1):} \\ \Delta p_2 &= +1,2m_1 v_1. \end{aligned}$$

93. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω v_1' και v_1 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων του σώματος Σ_1 αμέσως μετά και ακριβώς πριν από την κρούση με το σώμα Σ_2 .

Επειδή το σώμα Σ_1 έχει μεταβιβάσει στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση το 96% της κινητικής του ενέργειας, αμέσως μετά την κρούση θα του έχει απομείνει το 4% της κινητικής ενέργειας που είχε πριν από την κρούση. Επομένως:

$$\begin{aligned} K_{1(\text{μετά})} &= \frac{4}{100} K_{1(\text{πριν})} \\ \text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 &= 0,04 \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } |v_1'| = 0,2|v_1| \\ \text{ή } v_1' &= -0,2v_1 \quad \text{ή } \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -0,2v_1 \\ \text{ή } -0,2(m_1 + m_2) &= m_1 - m_2 \quad \text{ή } m_2 = 1,5m_1. \end{aligned}$$

94. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 αποκτά ταχύτητα $\bar{v}_2'$ ίδιας φοράς με τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ που είχε το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν

από την κρούση. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 > 0.$$

Επειδή κατά τη διάρκεια της κρούσης η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται σταθερή, ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } \Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -1,6 m_1 v_1.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

$$\text{Έχουμε: } \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{ή} \quad +1,6 m_1 v_1 = m_2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad 1,6 m_1 + 1,6 m_2 = 2 m_2$$

$$\text{ή} \quad 1,6 m_1 = 0,4 m_2 \quad \text{ή} \quad m_2 = 4 m_1.$$

Επειδή η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της μηχανικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μεταβιβάστηκε στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση είναι ίσο με το ποσοστό επί τοις (%) εκατό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μεταβιβάστηκε στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση. Επομένως, είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2}{\frac{1}{2} m_1 v^2_1} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2}{m_1 v^2_1} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 64\%.$$

95. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Οι αλγεβρικές τιμές v'_1 και v'_2 των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την πρώτη μεταξύ τους κρούση υπολογίζονται από τις

$$\text{σχέσεις: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = 0$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = v_1.$$

Συνεπώς, αμέσως μετά την πρώτη κρούση μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 η σφαίρα Σ_1 ακινητοποιείται και η σφαίρα Σ_2 αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά, οπότε συγκρούεται με τη σφαίρα Σ_3 με ταχύτητα $\vec{v}'_2$.

Οι αλγεβρικές τιμές v''_2 και v'_3 των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση (δεύτερη συνολικά) υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v''_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v'_2 \quad \text{ή} \quad v''_2 = -\frac{v'_2}{3} \quad \text{ή} \quad v''_2 = -\frac{v_1}{3}$$

$$\text{και: } v'_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v'_2 \quad \text{ή} \quad v'_3 = +\frac{2v'_2}{3}$$

$$\text{ή} \quad v'_3 = +\frac{2}{3} v_1.$$

Συνεπώς, αμέσως μετά την κρούση της Σ_2 με τη Σ_3 , η σφαίρα Σ_3 αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά, ενώ η σφαίρα Σ_2 αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά και συγκρούεται για δεύτερη φορά με ταχύτητα $\vec{v}''_2$ με την ακίνητη σφαίρα Σ_1 . Έστω v''_1 και v'''_2 οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά τη δεύτερη μεταξύ τους κρούση (τρίτη συνολικά).

Επειδή οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε αμέσως μετά τη δεύτερη μεταξύ τους κρούση η Σ_1 θα αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα

μέτρον $|v_1'| = |v_2'| = \frac{|v_1|}{3}$, ενώ η Σ_2 θα ακινητοποιηθεί ($v_2'' = 0$).

Επομένως, το συνολικό πλήθος των κρούσεων που πραγματοποιούνται είναι 3.

B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

$$\text{Έχουμε: } \frac{K_3}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} m_3 v_3'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1''^2}$$

$$\text{ή } \frac{K_3}{K_1} = \frac{4m \left(\frac{2}{3} v_1 \right)^2}{2m \left(\frac{v_1}{3} \right)^2} \text{ ή } \frac{K_3}{K_1} = 8.$$

96. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση και v_1' , v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση.

$$\text{Ισχύουν: } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1),$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Επειδή $m_1 < m_2$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $v_1' < 0$ και $v_2' > 0$. Συνεπώς, αμέσως μετά την κρούση της σφαίρας Σ_1 με τη σφαίρα Σ_2 η Σ_1 κινείται προς τα αριστερά, ενώ η Σ_2 κινείται προς τα δεξιά και μετά από λίγο συγκρούεται με τον λείο κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα $\bar{v}_2'$. Επειδή η κρούση της Σ_2 με τον τοίχο είναι ελαστική, ανακλάται με ταχύτητα $\bar{v}_2''$ μέτρον $|v_2''| = |v_2'|$ ή, αλγεβρικά: $v_2'' = -v_2'$.

Για να διατηρείται σταθερή η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών μετά την κρούση της Σ_2 με τον τοίχο, θα πρέπει να ισχύει

$$|v_2''| = |v_1'| \text{ ή, αλγεβρικά } v_2'' = v_1' \text{ ή } -v_2' = v_1'$$

$$\text{ή } -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ ή } \frac{m_2}{m_1} = 3.$$

97. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Η αλγεβρική τιμή v_1' της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ ή } v_1' = -0,2v_1 \quad (1).$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{|K_{I(\text{μετά})} - K_{I(\text{πριν})}|}{K_{I(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{|v_1'^2 - v_1^2|}{v_1^2} \cdot 100\%$$

ή, λόγω της σχέσης (1): $\pi = 96\%$.

98. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Βλέπε θεωρία: «Α. Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών».

99. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Επειδή $m_2 \gg m_1$, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι $v_1' = -v_1$.

Συνεπώς, η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{I(\text{μετά})} - \vec{p}_{I(\text{πριν})}$$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } \Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1$$

$$\text{ή } \Delta p_1 = m_1 (-v_1) - m_1 v_1 \text{ ή } \Delta p_1 = -2m_1 v_1.$$

100. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \quad (1).$$

Επειδή $m_1 \gg m_2$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$, οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$v'_1 = v_1.$$

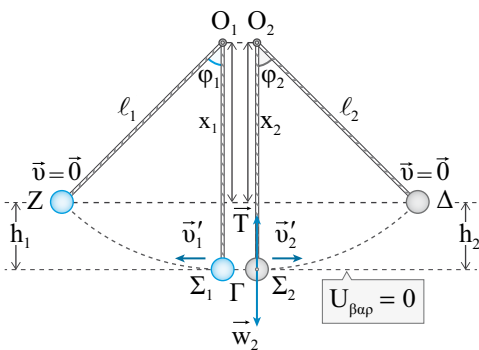
Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = 0.$$

101. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση τους.



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν:

$$\sin \varphi_1 = \frac{x_1}{\ell_1} \quad \text{ή} \quad \sin \varphi_1 = \frac{\ell_1 - h_1}{\ell_1}$$

$$\text{ή} \quad h_1 = \ell_1 (1 - \sin \varphi_1) \quad (1) \quad \text{και:}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{x_2}{\ell_2} \quad \text{ή} \quad \sin \varphi_2 = \frac{\ell_2 - h_2}{\ell_2}$$

$$\text{ή} \quad h_2 = \ell_2 (1 - \sin \varphi_2) \quad (2).$$

Επειδή $\varphi_1 = \varphi_2$ και $\ell_1 = \ell_2$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $h_1 = h_2$.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Ζ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(r)} = E_{\mu\eta\chi}^{(z)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h_1$$

$$\text{ή} \quad |v'_1| = \sqrt{2gh_1} \quad (3).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Δ που φαίνεται στο σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(r)} = E_{\mu\eta\chi}^{(A)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g h_2$$

$$\text{ή} \quad |v'_2| = \sqrt{2gh_2} \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$|v'_1| = |v'_2| \quad \text{ή} \quad -v'_1 = v'_2$$

$$\text{ή} \quad -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad (5).$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 από τη θέση Α όπου αφέθηκε ελεύθερη μέχρι τη θέση Γ όπου έγινε η κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\text{αρχ})} = E_{\mu\eta\chi(\text{τελ})}$$

$$\text{ή} \quad K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή} \quad 0 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{2g\ell} \quad (6).$$

Ισχύει $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή, λόγω των (5) και

$$(6): v_2' = \frac{\sqrt{2g\ell}}{2} \quad (7).$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στη σφαίρα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως, είναι:

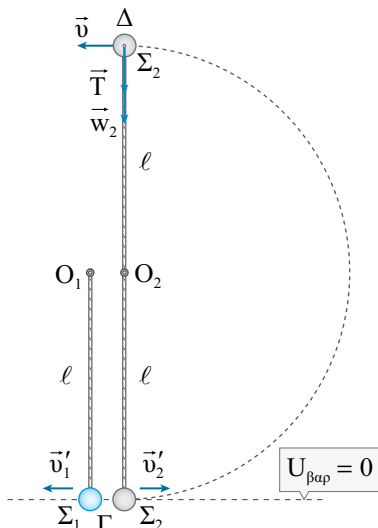
$$\Sigma F = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T - m_2 g = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = m_2 g + \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \quad \text{ή, λόγω των (5) και (7):}$$

$$T = 4,5 m_1 g.$$

102. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα Σ_2 στο σημείο Δ είναι: το βάρος της $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ και η

τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως, είναι:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$

Για να εκτελέσει η σφαίρα Σ_2 ανακύκλωση μετά την κρούση, θα πρέπει να φτάσει στο Δ με το νήμα τεντωμένο.

Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει $T \geq 0$ ή, λόγω

$$\text{της (1): } \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_2 v^2}{\ell} \geq m_2 g$$

$$\text{ή} \quad v \geq \sqrt{g\ell} \quad (2).$$

Από τη (2) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 στο σημείο Δ στην περίπτωση που μόλις εκτελεί ανακύκλωση είναι:

$$v = \sqrt{g\ell} \quad (3).$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2' της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η Σ_2 μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ.

$$\text{Έχουμε: } E_{\text{μηχ}(\Gamma)} = E_{\text{μηχ}(\Delta)}$$

$$\text{ή} \quad K_{2(\Gamma)} + U_{2(\Gamma)} = K_{2(\Delta)} + U_{2(\Delta)}$$

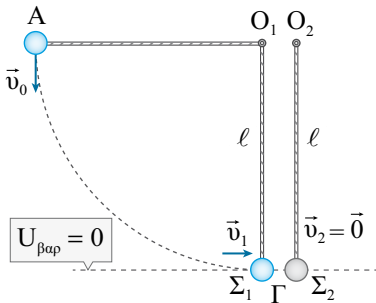
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g 2\ell \quad \text{ή, λόγω της}$$

$$(3): \frac{1}{2} v_2'^2 = \frac{1}{2} g\ell + 2g\ell \quad \text{ή} \quad v_2' = \sqrt{5g\ell}.$$

Από τον τύπο που δίνει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad \sqrt{5g\ell} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 2\sqrt{5g\ell} \quad (4).$$



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ. Έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(A)} = E_{\mu\eta\chi}^{(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 - 2g\ell} \quad \text{ή λόγω (4)} \quad v_0 = \sqrt{18g\ell}$$

$$\text{ή} \quad v_0 = 3\sqrt{2g\ell}.$$

103. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω v_2' το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 - 3m_1 \cdot 0,5v_1 = -m_1 \cdot 1,25v_1 + 3m_1 v_2'$$

$$\text{ή} \quad v_2' = 0,25v_1.$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών ακριβώς πριν από την κρού-

$$\text{ση είναι: } K_{ολ(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{ή} \quad K_{ολ(πριν)} = \frac{7}{8} m_1 v_1^2.$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση

$$\text{είναι: } K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad K_{ολ(μετά)} = \frac{7}{8} m_1 v_1^2.$$

Επειδή $K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)}$, η κρούση είναι ελαστική.

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον

$$\text{τύπο: } \pi = \frac{K_{2(μετά)} - K_{2(πριν)}}{K_{2(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{v_2'^2 - v_2^2}{v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{(0,25v_1)^2 - (0,5v_1)^2}{(0,5v_1)^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = -75\%.$$

104. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το σώμα Σ_1 κινούμενο με ταχύτητα μέτρου v_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το ακίνητο σώμα Σ_2 . Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad \frac{v}{v_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (1),$$

όπου v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μετατρέπεται σε θερμότητα εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi_1 = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \Pi_1 = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \Pi_1 = \left[1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right] \cdot 100\%$$

ή, λόγω της (1):

$$\Pi_1 = \left[1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \Pi_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 100\% \quad (3).$$

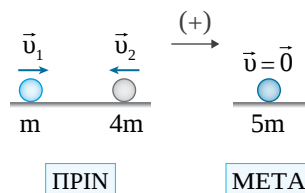
Όπως φαίνεται από τη σχέση (3), το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση εξαρτάται μόνο από τις μάζες m_1 και m_2 των δύο σωμάτων που συγκρούονται.

Άρα το ποσοστό είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή: $\Pi_2 = \Pi_1$.

105. Σωστή επιλογή είναι η α.

Για να παραμείνει ακίνητο το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, πρέπει τα συγκρουόμενα σώματα ακριβώς πριν από την κρούση να κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Έστω

$\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων με μάζες m και $4m$ αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας του σώματος μάζας m ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} \quad \text{ή } m v_1 - 4m v_2 = 0 \quad \text{ή } v_1 = 4v_2$$

$$\text{ή } v_2 = \frac{v_1}{4} \quad (1).$$

Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση υπολογίζεται από τον τύπο: $\Delta E_{\text{μηχ}} = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 4m v_2^2 - 0 \quad \text{ή, λόγω της}$$

$$(1): \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 4m \left(\frac{v_1}{4} \right)^2$$

$$\text{ή } \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{4}$$

$$\text{ή } \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 + \frac{1}{4} \right) \quad \text{ή } \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{5}{4} K.$$

106. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα και K_1 η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου Β ακριβώς πριν από την κρούση του με το αυτοκίνητο Α. Είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1).$$

Έστω $\vec{v}_2$ η ταχύτητα και K_2 η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος που προκύπτει από

την πλαστική κρούση του αυτοκινήτου Β με το αυτοκίνητο Α. Είναι $K_2 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2$ (2).

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, ισχύει:

$$K_2 = \frac{1}{3}K_1 \text{ ή, λόγω των (1) και (2):}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}mv_1^2 \text{ ή } v_2^2 = \frac{mv_1^2}{3(M+m)} \text{ (3).}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των αυτοκινήτων Α και Β κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \text{ ή } mv_1 = (M+m)v_2$$

$$\text{ή } m^2v_1^2 = (M+m)^2v_2^2 \text{ ή, λόγω της (3):}$$

$$m^2v_1^2 = (M+m)^2 \frac{mv_1^2}{3(M+m)}$$

$$\text{ή } m = \frac{M+m}{3} \text{ ή } M = 2m \text{ ή } \frac{m}{M} = \frac{1}{2}.$$

107. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Από τη μεθοδολογία Γ1 γνωρίζουμε ότι το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μετατρέπεται σε θερμότητα εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 100\% \text{ ή } 0,9 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ή } 0,9m_2 = 0,9m_1 \text{ ή } \frac{m_2}{m_1} = 9.$$

108. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω $\vec{p}$ η ορμή του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \text{ ή } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

$$\text{ή } \vec{p}_1 + (-2\vec{p}_1) = \vec{p} \text{ ή } \vec{p} = -\vec{p}_1 \text{ (1).}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1) το συσσωμάτωμα μετά την κρούση αποκτά αντίθετη ορμή από την ορμή που είχε το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

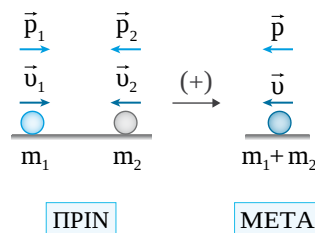
Έστω $m_1, m_2 = m_1$ οι μάζες και v_1, v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση. Έχουμε:

$$\vec{p}_2 = -2\vec{p}_1 \text{ ή } |\vec{p}_2| = 2|\vec{p}_1|$$

$$\text{ή } m_2v_2 = 2m_1v_1 \text{ ή } v_2 = 2v_1 \text{ (2).}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Σύμφωνα με την (1) ισχύει: $|\vec{p}| = |\vec{p}_1|$ ή $(m_1 + m_2)v = m_1v_1$

$$\text{ή } v = \frac{v_1}{2} \text{ (3).}$$



Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1(μετά)} - \vec{p}_{1(πριν)} \text{ ή, θεωρώντας θετική τη φορά της ορμής } \vec{p}_1: \Delta p_1 = -m_1v - m_1v_1$$

$$\text{ή, λόγω της (3): } \Delta p_1 = -\frac{3m_1v_1}{2}$$

$$\text{ή } \Delta\vec{p}_1 = -\frac{3}{2}\vec{p}_1.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

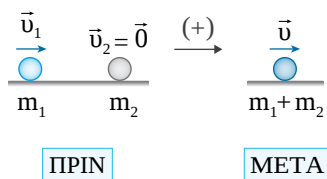
$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{2v^2}{v_1^2 + v_2^2} \cdot 100\% \quad \text{ή, λόγω των (2) και (3):}$$

$$\pi = 10\%.$$

109. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad v = \frac{v_1}{4} \quad (1).$$

Το ζητούμενο ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τον τύπο: $\pi = \frac{|\Delta K_{ολ}|}{K_{I(πριν)}} \cdot 100\%$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\left| \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left| \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 - 1 \right| \cdot 100\%$$

$$\text{ή, λόγω της (1): } \pi = 75\%.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

$$\text{Είναι } \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{I(μετά)} - \vec{p}_{I(πριν)}$$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } \Delta p_1 = m_1 v - m_1 v_1$$

$$\text{ή, λόγω της (1): } \Delta p_1 = -\frac{3}{4} m_1 v_1.$$

110. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ οι ορμές των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση και $\vec{p}$ η ορμή του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Είναι $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ ή $(-\vec{p}_2) + \vec{p}_2 = \vec{p}$ ή $\vec{p} = \vec{0}$.

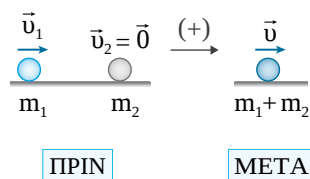
Συνεπώς, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση ακινητοποιείται, δηλαδή η κινητική του ενέργεια γίνεται $K_{ολ(μετά)} = 0$. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left[1 - \frac{K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \right] \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 100\%.$$

111. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.**1ος τρόπος:**

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{u}_1$ έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1).$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p_2 = m_2(+v) - 0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = +m_2 v$$

$$\text{ή} \quad |\Delta p_2| = m_2 v \quad \text{ή} \quad 0,8 m_1 v_1 = m_2 v$$

$$\text{ή} \quad v = \frac{0,8 m_1}{m_2} v_1 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0,8 m_1}{m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 4 m_1 \quad (3).$$

Από την (1), λόγω της (3), προκύπτει:

$$v = \frac{v_1}{5} \quad (4).$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})} \quad \text{ή, αλγεβρικά}$$

$$\Delta p_1 = m_1 v - m_1 v_1 \quad \text{ή, λόγω της (4):}$$

$$\Delta p_1 = -\frac{4}{5} m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p = -0,8 m_1 v_1.$$

2ος τρόπος:

Επειδή σε κάθε κρούση διατηρείται η ορμή του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$ ή $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ ή $\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2$ ή $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$ ή, αλγεβρικά $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ (5).

Επειδή το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο, αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί προς την ίδια φορά με την ταχύτητα $\vec{v}_1$.

Συνεπώς, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ η αλγεβρική τιμή Δp_2 της μεταβολής της ορμής του Σ_2 εξαιτίας της κρούσης θα είναι θετική. Επομένως: $\Delta p_2 = +|\Delta p_2|$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = +0,8 m_1 v_1 \quad (6).$$

Από την (5) λόγω της (6) προκύπτει:

$$\Delta p_1 = -0,8 m_1 v_1.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον

$$\text{τύπο} \quad \pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{και σύμφωνα με τη μεθοδολογία Γ1 είναι:}$$

$$\pi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% \quad \text{ή, λόγω της (3):} \quad \pi = 80\%.$$

112. A. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης,

$$\text{ισχύει:} \quad K_{\text{μετά}} = K_{\text{πριν}} - \frac{64}{100} K_{\text{πριν}}$$

$$\text{ή} \quad K_{\text{μετά}} = \frac{36}{100} K_{\text{πριν}}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{36}{100} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = 0,6 v_0 \quad (1).$$

Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω, η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής της σφαίρας εξαιτίας της κρούσης της με το δάπεδο υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{μετά}} - \vec{p}_{\text{πριν}} \quad \text{ή} \quad \Delta p = m v_1 - (-m v_0)$$

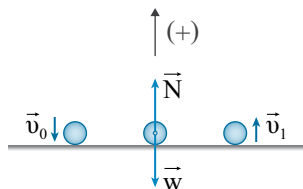
$$\text{ή} \quad \Delta p = +m(v_1 + v_0) \quad \text{ή, λόγω της (1):}$$

$$\Delta p = +1,6 m v_0 \quad \text{ή} \quad |\Delta p| = 1,6 m v_0.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα κατά τη διάρκεια της κρούσης με το δάπεδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{N}$ που δέχεται από το δάπεδο η οποία δεν παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Έστω $\vec{N}$ το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στη σφαίρα από το δάπεδο κατά τη διάρκεια της κρούσης με αυτό.



Η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά τη διάρκεια της κρούσης με το δάπεδο υπολογίζεται από τη σχέση $\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } \Sigma F = + \frac{1,6mv_0}{\Delta t}$$

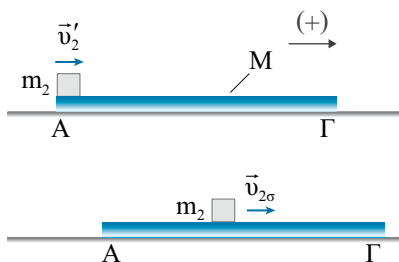
$$\text{ή } \bar{N} - mg = + \frac{1,6mv_0}{\Delta t} \quad \text{ή } \bar{N} = mg + \frac{1,6mv_0}{\Delta t}.$$

113. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας

του Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = \frac{2}{3} v_1 \quad (1).$$



Το σώμα Σ_2 αρχίζει να κινείται πάνω στη σανίδα με ταχύτητα $\vec{v}'_2$.

Έστω $\vec{v}_{2\sigma}$ η κοινή ταχύτητα που αποκτούν το σώμα Σ_2 και η σανίδα τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 σταματά να κινείται σε σχέση με τη σανίδα. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα σώμα Σ_2 - σανίδα έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \quad \text{ή} \quad m_2 v'_2 = (m_2 + M) v_{2\sigma}$$

$$\text{ή } v_{2\sigma} = \frac{1}{2} v'_2 \quad \text{ή λόγω της (1): } v_{2\sigma} = \frac{1}{3} v_1 \quad (2).$$

Επειδή η κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 είναι ελαστική, κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν εκλύεται θερμότητα.

Έστω Q η θερμότητα που εκλύεται κατά την ολίσθηση του σώματος Σ_2 πάνω στη σανίδα, λόγω της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο Σ_2 από αυτήν, από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 σταματά να κινείται σε σχέση με τη σανίδα. Έχουμε:

$$Q = E_{αρχ} - E_{τελ}$$

$$\text{ή } Q = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 - \frac{1}{2} (m_2 + M) v_{2\sigma}^2$$

ή, λόγω των (1) και (2):

$$Q = \frac{1}{2} 2m \frac{4v_1^2}{9} - \frac{1}{2} 4m \frac{v_1^2}{9}$$

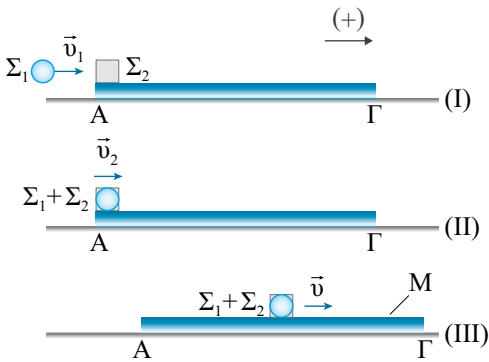
$$\text{ή } Q = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9} \right) \quad \text{ή} \quad Q = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (3).$$

Επειδή η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$,

από την (3) προκύπτει: $Q = \frac{4}{9} K_1$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω $\vec{v}_2$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που προκύπτει αμέσως μετά την πλαστική κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 και $\vec{v}$ η κοινή ταχύτητα που αποκτούν το συσσωμάτωμα και η σανίδα τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα σταματά να κινείται σε σχέση με τη σανίδα.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των τριών σωμάτων για τα στιγμιότυπα (I) και (III) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2 + M) v$$

$$\text{ή} \quad m v_1 = 5 m v \quad \text{ή} \quad v = \frac{v_1}{5} \quad (4).$$

Το ποσό θερμότητας Q' που εκλύεται από τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα αποκτά κοινή ταχύτητα με τη σανίδα υπολογίζεται από τον τύπο: $Q' = E_{αρχ} - E_{τελ}$

$$\text{ή} \quad Q' = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + M) v^2$$

$$\text{ή} \quad Q' = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 m v^2 \quad \text{ή, λόγω της (4):}$$

$$Q' = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 m \frac{v_1^2}{25}$$

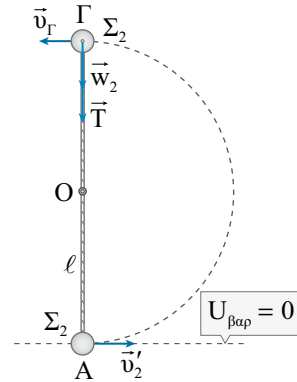
$$\text{ή} \quad Q' = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$\text{ή} \quad Q' = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \text{ή} \quad Q' = \frac{4}{5} K_1.$$

114. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω v_Γ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος

Σ_2 στο ανώτερο σημείο Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του είναι: το βάρος του $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως, είναι:

$$\Sigma F = F_k \quad \text{ή} \quad T + m_2 g = \frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$

Για να εκτελέσει το Σ_2 ανακύκλωση μετά την κρούση, θα πρέπει να φτάσει στο σημείο Γ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει $T \geq 0$ ή, λόγω της (1):

$$\frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell} - m_2 g \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell} \geq m_2 g$$

$$\text{ή} \quad v_\Gamma \geq \sqrt{g\ell} \quad (2).$$

Από τη (2) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο σημείο Γ στην περίπτωση που μόλις εκτελεί ανακύκλωση είναι $v_\Gamma = \sqrt{g\ell}$ (3).

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2' της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις

Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Α. Έχουμε: $E_{\mu\chi(A)} = E_{\mu\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή } K_{2(A)} + U_{2(A)} = K_{2(\Gamma)} + U_{2(\Gamma)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_\Gamma^2 + m_2 g 2\ell \quad \text{ή, λόγω της}$$

$$(3): \frac{1}{2} v_2'^2 = \frac{1}{2} g\ell + 2g\ell \quad \text{ή } v_2' = \sqrt{5g\ell}.$$

Για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } \sqrt{5g\ell} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v_1 = 2\sqrt{5g\ell} \quad (4).$$

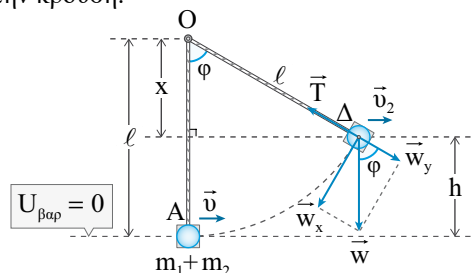
B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή}$$

$$\text{λόγω της (4): } m \cdot 2\sqrt{5g\ell} = 4mv \quad \text{ή } v = \frac{\sqrt{5g\ell}}{2}.$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με την αρχική κατακόρυφη θέση του για πρώτη φορά μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μεταξύ των θέσεων Α και Δ που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\chi(αρχ)} = E_{\mu\chi(τελ)} \quad \text{ή } K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 + (m_1 + m_2) gh$$

$$\text{ή } v_2^2 = v^2 - 2gh$$

$$\text{ή } v_2^2 = \left(\frac{\sqrt{5g\ell}}{2} \right)^2 - 2g(\ell - x)$$

$$\text{ή } v_2^2 = \frac{5g\ell}{4} - 2g(\ell - \ell \sin\phi)$$

$$\text{ή } v_2^2 = \frac{5g\ell}{4} - 2g\ell \left(1 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{ή } v_2^2 = \frac{g\ell}{4} \quad (5).$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στη θέση Δ κατά τη διεύθυνση της ακτίνας δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως, είναι: $\Sigma F_{ακτ} = F_\kappa$

$$\text{ή } T - w_y = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{\ell}$$

$$\text{ή } T - (m_1 + m_2) g \sin\phi = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{\ell}$$

$$\text{ή, λόγω της (5): } T = 2mg + \frac{4m \frac{g\ell}{4}}{\ell}$$

$$\text{ή } T = 3mg.$$

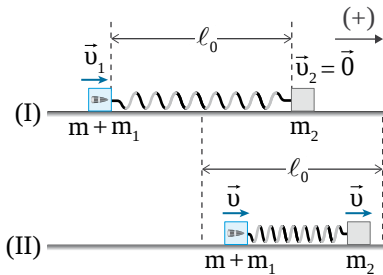
115. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που προκύπτει αμέσως μετά την πλαστική κρούση του βλήματος με το σώμα Σ_1 . Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } mv_0 = (m + m_1) v_1$$

$$\text{ή } v_1 = \frac{v_0}{2} \quad (1).$$

Το συσσωμάτωμα αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$ αμέσως μετά την κρούση και το ελατήριο συσπείρывается μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα και το σώμα Σ_2 αποκτούν κοινή ταχύτητα $\vec{v}$. Συνεπώς, το ελατήριο θα αποκτήσει τη μέγιστη συσπίρωση $\Delta\ell_{\max}$, όταν το συσσωμάτωμα και το σώμα Σ_2 αποκτήσουν κοινή ταχύτητα $\vec{v}$.



Το σύστημα συσσωμάτωμα-σώμα Σ_2 είναι μονωμένο. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα συσσωμάτωμα-σώμα Σ_2 μεταξύ των στιγμιότυπων (I) και (II) της κίνησής τους που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(αρχ)}^{(I)} = \vec{p}_{\text{ολ}(τελ)}^{(II)}$$

$$\text{ή } (m + m_1)v_1 = (m + m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } 2mv_1 = 4mv \quad \text{ή } v = \frac{v_1}{2}$$

$$\text{ή, λόγω της (1): } v = \frac{v_0}{4} \quad (2).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα συσσωμάτωμα-σώμα Σ_2 μεταξύ των στιγμιότυπων (I) και (II) του παραπάνω σχήματος έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(αρχ)} = E_{\text{μηχ}(τελ)} \quad \text{ή}$$

$$K_{(I)} + U_{\text{ελ}(I)} = K_{(II)} + U_{\text{ελ}(II)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}(m + m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}2mv_1^2 = \frac{1}{2}4mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2$$

ή, λόγω των (1) και (2):

$$m\frac{v_0^2}{4} = m\frac{v_0^2}{8} + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \quad (3).$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

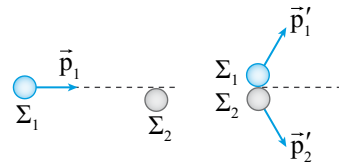
Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται ως εξής:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή, λόγω της (3):}$$

$$\pi = 25\%.$$

116. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

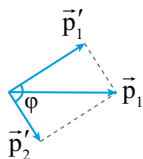
Οι ορμές $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(πριν)} = \vec{p}_{\text{ολ}(μετά)} \quad \text{ή } \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (1).$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, από το διανυσματικό άθροισμα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών μετά την κρούση προκύπτει η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση.



Επομένως, για το μέτρο της ορμής $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση ισχύει:

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi} \quad (2),$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$.

Από τη (2) έχουμε:

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi$$

$$\text{ή } (m_1v_1)^2 = (m_1v_1')^2 + (m_2v_2')^2 + 2m_1v_1'm_2v_2'\cos\varphi$$

$$\text{ή } m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2 + 2m_1m_2v_1'v_2'\cos\varphi$$

και επειδή $m_1 = m_2$, προκύπτει:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2'\cos\varphi \quad (3).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως, είναι:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$\text{ή } v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (4).$$

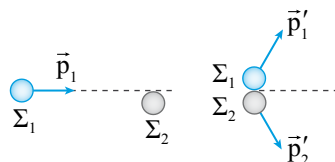
Από τις (3) και (4) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $0 = 2v_1'v_2'\cos\varphi$ και επειδή $v_1' \neq 0$ και $v_2' \neq 0$, έχουμε τελικά: $\cos\varphi = 0$ ή $\varphi = 90^\circ$.

Άρα $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$ ή $\varphi_2 = 60^\circ$.

117. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Οι ορμές $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση

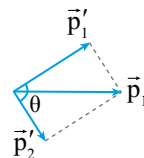
φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (1).$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), από το διανυσματικό άθροισμα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών μετά την κρούση προκύπτει η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση.



Επομένως, για το μέτρο της ορμής $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση ισχύει:

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\theta} \quad (2).$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$.

Από τη (2) έχουμε:

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\theta$$

$$\text{ή } (m_1v_1)^2 = (m_1v_1')^2 + (m_2v_2')^2 + 2m_1v_1'm_2v_2'\cos\theta$$

$$\text{ή } m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2 + 2m_1m_2v_1'v_2'\cos\theta \quad (3).$$

Επειδή $m_1 = m_2$ και $\theta = 2\varphi = 90^\circ$, από την (3) προκύπτει: $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ (4).

$$\text{Από την (4) έχουμε: } \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}.$$

Άρα η κρούση μεταξύ των σφαιρών είναι ελαστική.

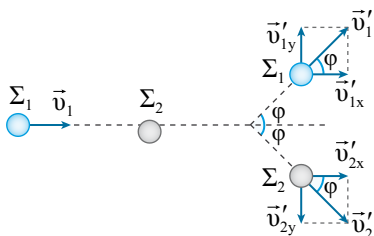
B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{2(\text{μετά})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = \frac{v_2'^2}{v_1^2} \cdot 100\% \quad (5).$$

Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ στις συνιστώσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $y'y$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω έχουμε:

$$\vec{p}_{y(\text{πριν})} = \vec{p}_{y(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad 0 = m v_{1y}' - m v_{2y}'$$

$$\text{ή } v_{1y}' = v_{2y}' \quad \text{ή } v_1' \eta \mu \phi = v_2' \eta \mu \phi \quad \text{ή } v_1' = v_2'.$$

Συνεπώς, από την (4) έχουμε:

$$v_1^2 = 2v_2'^2 \quad \text{ή} \quad v_2'^2 = \frac{v_1^2}{2} \quad (6).$$

Από την (5), λόγω της (6), προκύπτει ότι:

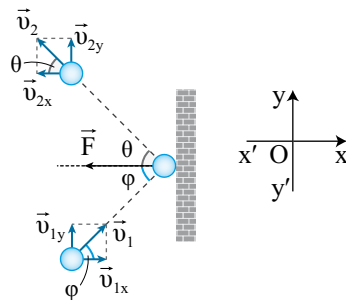
$$\pi = 50\%.$$

118. A. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Ισχύει $\phi = \theta$. Η ορμή της σφαίρας διατηρείται στον άξονα $y'y$. Επομένως:

$$\vec{p}_{y(\text{πριν})} = \vec{p}_{y(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m v_{1y} = m v_{2y}$$

$$\text{ή } v_1 \eta \mu \phi = v_2 \eta \mu \theta \quad \text{ή } v_1 = v_2.$$



Η κινητική ενέργεια της σφαίρας πριν από την κρούση είναι: $K_{\text{πριν}} = \frac{1}{2} m v_1^2$, ενώ η κινητική της ενέργεια μετά την κρούση είναι:

$$K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \text{ή} \quad K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\text{ή } K_{\text{μετά}} = K_{\text{πριν}}.$$

Άρα η κρούση της σφαίρας με τον τοίχο είναι ελαστική.

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η ορμή της σφαίρας μεταβάλλεται στον άξονα $x'x$. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στον άξονα $x'x$ εξαιτίας της κρούσης με τον τοίχο είναι: $\Delta \vec{p}_x = \vec{p}_{x(\text{μετά})} - \vec{p}_{x(\text{πριν})}$ ή, αλγεβρικά:

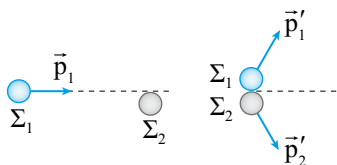
$$\Delta p_x = -m v_2 \sin \theta - m v_1 \sin \phi$$

$$\text{ή } \Delta p_x = -2m v_1 \sin \phi \quad \text{ή} \quad \Delta p_x = -2m v_1 \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \Delta p_x = -m v_1 \quad \text{ή} \quad |\Delta p_x| = m v_1.$$

119. A. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

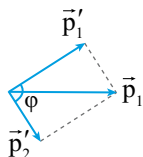
Οι ορμές $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (1).$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), από το διανυσματικό άθροισμα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών μετά την κρούση προκύπτει η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση.



Επομένως, για το μέτρο της ορμής $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση ισχύει:

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi} \quad (2),$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$. Ισχύει:

$$\varphi = 2\theta \quad \text{ή} \quad \varphi = 60^\circ.$$

Από τη (2) έχουμε:

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi$$

$$\text{ή} \quad (m_1v_1)^2 = (m_1v_1')^2 + (m_2v_2')^2 + 2m_1v_1'm_2v_2'\cos\varphi$$

$$\text{ή} \quad m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2 + m_1m_2v_1'v_2'$$

και επειδή $m_1 = m_2$, προκύπτει τελικά:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_1'v_2' \quad (3).$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3) με το $\frac{1}{2}m$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_1'v_2'$$

$$\text{ή} \quad K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)} + \frac{1}{2}mv_1'v_2' \quad (4).$$

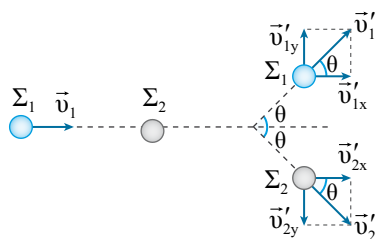
Όπως φαίνεται από την (4), είναι:

$$K_{ολ(πριν)} \neq K_{ολ(μετά)}.$$

Άρα η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι **ανελαστική**.

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ στις συνιστώσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $y'y$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω έχουμε:

$$\vec{p}_{πριν(y)} = \vec{p}_{μετά(y)} \quad \text{ή} \quad 0 = mv_1'y - mv_2'y$$

$$\text{ή} \quad v_1'y = v_2'y \quad \text{ή} \quad v_1'\sin\theta = v_2'\sin\theta \quad \text{ή} \quad v_1' = v_2'.$$

$$\text{Άρα από την (3) προκύπτει ότι: } v_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}v_1'.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' \quad \text{ή} \quad |\Delta\vec{p}_2| = |\vec{p}_2'|$$

$$\text{ή} \quad |\Delta\vec{p}_2| = m_2v_2' \quad \text{ή} \quad |\Delta\vec{p}_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}mv_1.$$

Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση, έχουμε: $\Delta\vec{p}_{ολ} = \vec{0}$ ή $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$

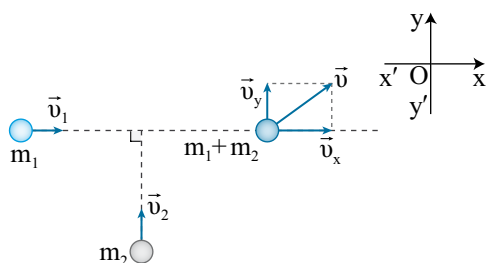
$$\text{ή} \quad \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \quad \text{ή} \quad |\Delta\vec{p}_1| = |\Delta\vec{p}_2|$$

$$\text{ή} \quad |\Delta\vec{p}_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}mv_1.$$

120. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$ έχουμε: $\vec{p}_{x(\piριν)} = \vec{p}_{x(μετά)}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_x \quad \text{ή } v_x = \frac{8}{5} \text{ m/s.}$$



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\vec{p}_{y(\piριν)} = \vec{p}_{y(μετά)}$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_y \quad \text{ή } v_y = \frac{6}{5} \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

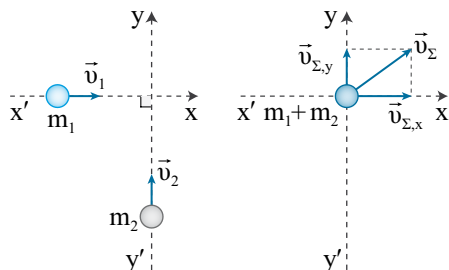
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{ή } v = 2 \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad \text{ή } K = 10 \text{ J.}$$

121. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\vec{v}_\Sigma$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.



Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_\Sigma$ του συσσωματώματος στις συνιστώσες $\vec{v}_{\Sigma,x}$ και $\vec{v}_{\Sigma,y}$ που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\piριν)} = \vec{p}_{x(μετά)} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{\Sigma,x}$$

$$\text{ή } v_{\Sigma,x} = \frac{v_1}{2} \quad \text{ή } v_{\Sigma,x} = \frac{v}{2} \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\vec{p}_{y(\piριν)} = \vec{p}_{y(μετά)} \quad \text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\Sigma,y}$$

$$\text{ή } v_{\Sigma,y} = \frac{v_2}{2} \quad \text{ή } v_{\Sigma,y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v \quad (2).$$

Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_\Sigma$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\Sigma = \sqrt{v_{\Sigma,x}^2 + v_{\Sigma,y}^2}$ ή, λόγω των (1) και (2): $v_\Sigma = v$.

Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση είναι: $E_{\alphaπ} = K_{ολ(\piριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } E_{\alphaπ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\Sigma^2$$

$$\text{ή } E_{\alphaπ} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_1 (\sqrt{3}v)^2 - \frac{1}{2} 2m_1 v^2$$

$$\text{ή } E_{\alphaπ} = m_1 v^2.$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση είναι: $\pi = \frac{E_{\alphaπ}}{K_{ολ(\piριν)}} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{m_1 v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{m_1 v^2}{2m_1 v^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 50\%.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 στον άξονα $x'x$ εξαιτίας της κρούσης εί-

ναι: $\Delta \vec{p}_{1x} = \vec{p}_{1x(\text{μετά})} - \vec{p}_{1x(\text{πριν})}$ ή, αλγεβρικά:

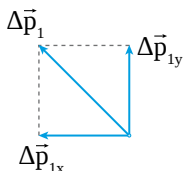
$$\Delta p_{1x} = m_1 v_{\Sigma, x} - m_1 v_1$$

$$\text{ή } \Delta p_{1x} = m_1 \frac{v}{2} - m_1 v \quad \text{ή } \Delta p_{1x} = -\frac{m_1 v}{2} \quad (3).$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 στον άξονα $y'y$ εξαιτίας της κρούσης εί-

ναι: $\Delta \vec{p}_{1y} = \vec{p}_{1y(\text{μετά})} - \vec{p}_{1y(\text{πριν})}$ ή, αλγεβρικά:

$$\Delta p_{1y} = m_1 v_{\Sigma, y} - 0 \quad \text{ή } \Delta p_{1y} = +\frac{\sqrt{3}}{2} m_1 v \quad (4).$$



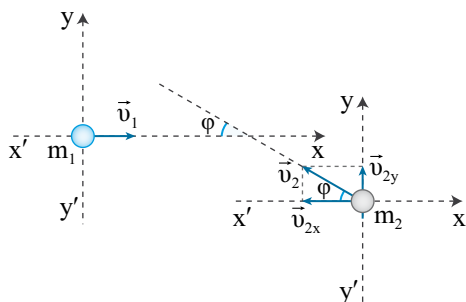
Το μέτρο Δp_1 της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης προκύπτει:

$$\Delta p_1 = \sqrt{(\Delta p_{1x})^2 + (\Delta p_{1y})^2}$$

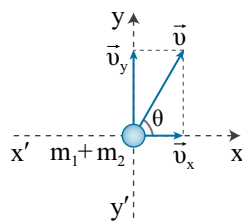
ή, λόγω των (3) και (4): $\Delta p_1 = m_1 v$.

122. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_2$ και $\vec{v}$ στις συνιστώσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΙΠΝ



ΜΕΤΑ

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε: $\vec{p}_{x(\text{πριν})} = \vec{p}_{x(\text{μετά})}$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x$$

$$\text{ή } 4m v_1 - m v_2 \sin \varphi = 5m v \sin \theta$$

$$\text{ή } 4v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 = \frac{5}{2} v \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{y(\text{πριν})} = \vec{p}_{y(\text{μετά})}$

$$\text{ή } m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2) v_y$$

$$\text{ή } m v_2 \eta \mu \varphi = 5m \eta \mu \theta \quad \text{ή } \frac{v_2}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} v$$

$$\text{ή } v_2 = 5\sqrt{3} v \quad (2).$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) προκύπτει:

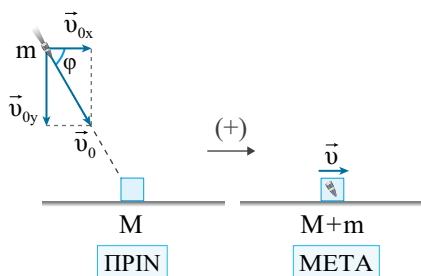
$v_1 = 2,5v$. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{4m(2,5v)^2}{m(5\sqrt{3}v)^2}$$

$$\text{ή } \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{3}.$$

123. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ του βλήματος στις συνιστώσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\pi\rho\nu)} = \vec{p}_{x(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \quad \text{ή} \quad m v_{0x} = (M+m)v$$

$$\text{ή} \quad m v_0 \sin\varphi = 10mv \quad \text{ή} \quad \frac{v_0}{2} = 10v$$

$$\text{ή} \quad v = \frac{v_0}{20} \quad (1).$$

Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)} - K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\%$$

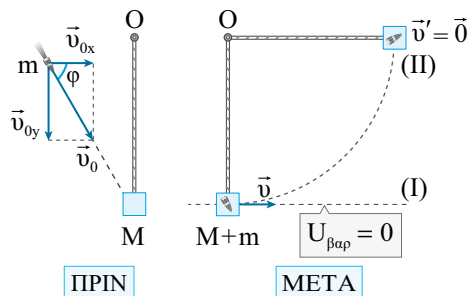
$$\text{ή} \quad \pi = \left(1 - \frac{K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)}} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left[1 - \frac{10m\left(\frac{v_0}{20}\right)^2}{mv_0^2} \right] \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 97,5\%.$$

124. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ στις συνιστώσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κυκλική κίνηση που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση μεταξύ των θέσεων (I) και (II) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(I)} = E_{\mu\eta\chi(II)} \quad \text{ή} \quad K_I + U_I = K_{II} + U_{II}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(M+m)v^2 + 0 = 0 + (M+m)g\ell$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{2g\ell}.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\pi\rho\nu)} = \vec{p}_{x(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \quad \text{ή} \quad m v_{0x} = (M+m)v$$

$$\text{ή} \quad m v_0 \sin\varphi = (M+m)v \quad \text{ή} \quad \frac{m v_0}{2} = (M+m)v$$

$$\text{ή} \quad \frac{m 10 \sqrt{2g\ell}}{2} = (M+m) \sqrt{2g\ell}$$

$$\text{ή} \quad 5m = M+m \quad \text{ή} \quad \frac{M}{m} = 4.$$

125. α. Έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -6 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$

$$\text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = -16 \text{ kg m/s.}$$

γ. Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται σταθερή κατά την κρούση, ισχύει: $\Delta \vec{p}_2 = -\Delta \vec{p}_1$ ή $|\Delta \vec{p}_2| = |\Delta \vec{p}_1|$
ή $|\Delta \vec{p}_2| = 16 \text{ kg m/s.}$

$$\text{Άρα} \quad \vec{F}_2 = \frac{|\Delta \vec{p}_2|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \vec{F}_2 = 800 \text{ N.}$$

δ. Σε κάθε ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται. Επομένως:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad K_{1(\text{πριν})} + K_{2(\text{πριν})} = K_{1(\text{μετά})} + K_{2(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad K_{1(\text{πριν})} - K_{1(\text{μετά})} = K_{2(\text{μετά})} - K_{2(\text{πριν})}$$

$$\text{ή} \quad -\Delta K_1 = \Delta K_2 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1.$$

126. α. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = +1 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +6 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $E_{\text{μετ}} = \Delta K_2$

$$\text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = K_{2(\text{μετά})} - K_{2(\text{πριν})}$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = 36 \text{ J.}$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{E_{\text{μετ}}}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 96\%.$$

127. α. Έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή} \quad -|v_1'| = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad m_1 = 2 \text{ kg.}$$

β. Είναι $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ και έχουμε:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 88,9\%.$$

γ. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$

$$\text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = -m_1 |v_1'| - m_1 |v_1|$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = -16 \text{ kg m/s} \quad \text{και} \quad \Delta \vec{p}_2 = -\Delta \vec{p}_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = +16 \text{ kg m/s.}$$

δ. Όταν η μία από τις δύο σφαίρες είναι ακίνητη πριν από την κρούση, το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας που

μεταβιβάζεται από τη μια σφαίρα στην άλλη εξαρτάται μόνο από τις μάζες των δύο σφαιρών και δίνεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\%.$$

Άρα και σε αυτήν την περίπτωση το ζητούμενο ποσοστό είναι $\pi = 88,9\%$.

128. α. Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση ισχύουν:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Επειδή οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι αντίθετες, ισχύει $v'_2 = -v'_1$ ή, λόγω των (1) και (2):

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

β. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν:

$$v'_1 = -4 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v'_2 = +4 \text{ m/s}.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{\text{I(μετά)}}}{K_{\text{I(πριν)}}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1}{\frac{1}{2} m_1 v^2_1} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 25\%.$$

129. α. Έχουμε: $K_{2(\text{μετά})} = K_{1(\text{πριν})}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 v^2_1$$

$$\text{ή} \quad m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 = m_1 v^2_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{4m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v^2_1 = m_1 v^2_1 \quad \text{ή} \quad \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1$$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2$$

$$\text{ή} \quad m^2_1 + m^2_2 + 2m_1 m_2 = 4m_1 m_2$$

$$\text{ή} \quad m^2_1 + m^2_2 - 2m_1 m_2 = 0 \quad \text{ή} \quad (m_1 - m_2)^2 = 0$$

$$\text{ή} \quad m_1 = m_2 \quad \text{ή} \quad m_2 = 1 \text{ kg}.$$

β. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική με $m_1 = m_2$, ισχύει $v'_2 = v_1 = 2 \text{ m/s}$.

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})}$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = 2 \text{ kg m/s}.$$

Υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της κρούσης από το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε στο σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 κατά

$$\text{την επαφή τους: } \bar{F}_2 = \frac{|\Delta p_2|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{|\Delta p_2|}{\bar{F}_2}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = 10^{-2} \text{ s}.$$

130. α. Έχουμε: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή} \quad m_2 = 5 \text{ kg}.$$

β. Έχουμε $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_1 = -16 \text{ m/s}$.

Επομένως, έχουμε: $p'_1 = m_1 v'_1$

$$\text{ή} \quad p'_1 = -16 \text{ kg m/s,} \quad \text{οπότε: } |p'_1| = 16 \text{ kg m/s}.$$

γ. Έχουμε: $E_{\text{μετ}} = \Delta K_2$

$$\text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = 160 \text{ J}.$$

δ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{K_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - K_{1(\pi\rho\iota\nu)}}{K_{1(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(\frac{v_1'^2}{v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = -55,6\%.$$

131. α. Οι αλγεβρικές τιμές v_1' και v_2' των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad \text{ή } v_1' = +4 \text{ m/s}$$

$$\text{και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

$$\text{ή } v_2' = +7 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $\Delta K_1 = K_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - K_{1(\pi\rho\iota\nu)}$

$$\text{ή } \Delta K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \text{ή } \Delta K_1 = -20 \text{ J}$$

$$\text{και } \Delta K_2 = K_{2(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - K_{2(\pi\rho\iota\nu)}$$

$$\text{ή } \Delta K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{ή } \Delta K_2 = +20 \text{ J.}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - \vec{p}_{1(\pi\rho\iota\nu)}$

$$\text{ή } \Delta p_1 = m_1v_1' - m_1v_1 \quad \text{ή } \Delta p_1 = -4 \text{ kg m/s.}$$

Σε όλες τις κρούσεις ισχύει:

$$\Delta p_2 = -\Delta p_1 \quad \text{ή } \Delta p_2 = +4 \text{ kg m/s.}$$

132. α. Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, θα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε:

$$v_1' = v_2 \quad \text{ή } v_1' = -2 \text{ m/s και}$$

$$v_2' = v_1 \quad \text{ή } v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

β. Για το μέτρο F_1 της μέσης δύναμης που ασκείται στη σφαίρα Σ_1 από τη σφαίρα Σ_2 κατά τη διάρκεια της κρούσης έχουμε: $\bar{F}_1 = \frac{|\Delta \vec{p}_1|}{\Delta t}$

$$\text{ή } \bar{F}_1 = \frac{|m_1v_1' - m_1v_1|}{\Delta t} \quad \text{ή } \bar{F}_1 = 1.200 \text{ N.}$$

γ. Για τη σφαίρα Σ_1 έχουμε:

$$\pi_1 = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi_1 = \frac{K_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - K_{1(\pi\rho\iota\nu)}}{K_{1(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi_1 = \left(\frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi_1 = \left(\frac{v_1'^2}{v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi_1 = -75\%.$$

Για τη σφαίρα Σ_2 έχουμε:

$$\pi_2 = \frac{\Delta K_2}{K_{2(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi_2 = \frac{K_{2(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - K_{2(\pi\rho\iota\nu)}}{K_{2(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi_2 = \left(\frac{v_2'^2}{v_2^2} - 1 \right) \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi_2 = +300\%.$$

133. α. Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ έχουμε:

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -1 \text{ m/s}$$

$$\text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή} \quad v'_2 = +14 \text{ m/s.}$$

β. Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -24 \text{ kg m/s}$$

$$\text{και} \quad \Delta p_2 = -\Delta p_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = +24 \text{ kg m/s.}$$

γ. Έχουμε: $\pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left| \frac{v_1'^2}{v_1^2} - 1 \right| \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 96\%.$$

134. α. Αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$K_{2(\text{μετά})} = 0 \quad \text{ή} \quad v'_2 = 0.$$

$$\text{Επομένως:} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή} \quad 0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή} \quad \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad m_1 = m_2 \frac{v_2}{v_2 - 2v_1} \quad \text{ή} \quad m_1 = 1 \text{ kg.}$$

β. Έχουμε: $v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή} \quad v'_1 = -9 \text{ m/s,} \quad \text{οπότε} \quad |v'_1| = 9 \text{ m/s.}$$

γ. Επειδή κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων η δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν δεν έχει σταθερό μέτρο, το έργο της δύναμης που ασκείται στο Σ_1 από το Σ_2 υπολογίζεται με εφαρμογή του Θεωρήματος Έργου-Κινητικής Ενέργειας για το Σ_1 . Είναι:

$$K_{1(\text{μετά})} - K_{1(\text{πριν})} = W_{F_1}$$

$$\text{ή} \quad W_{F_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή} \quad W_{F_1} = 36 \text{ J.}$$

135. α. Έστω v'_1 και v'_2 οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση. Έχουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = 0 \quad \text{και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +12 \text{ m/s.}$$

Συνεπώς, μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 ακινητοποιείται, ενώ η σφαίρα Σ_2 κινείται προς τα δεξιά και συγκρούεται με ταχύτητα $\vec{v}'_2$ με την ακίνητη σφαίρα Σ_3 .

Έστω v''_2 και v'_3 οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση. Έχουμε:

$$v''_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v'_2 \quad \text{ή} \quad v''_2 = -6 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v'_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v'_2 \quad \text{ή} \quad v'_3 = +6 \text{ m/s.}$$

Συνεπώς, αμέσως μετά την κρούση των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 , η Σ_2 κινείται προς τα αριστερά

με ταχύτητα μέτρου 6 m/s και συγκρούεται ξανά με την ακίνητη σφαίρα Σ_1 , ενώ η Σ_3 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου 6 m/s. Επειδή οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση τους η σφαίρα Σ_2 ακινητοποιείται, ενώ η σφαίρα Σ_1 κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $|v_1'| = 6$ m/s. Επομένως, το συνολικό πλήθος των κρούσεων μεταξύ των τριών σφαιρών είναι ίσο με 3.

β. Έχουμε: $\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$

ή $\pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 100\%.$

γ. Έχουμε: $\pi' = \frac{K_{1(\text{τελ})}}{K_{1(\text{αρχ})}} \cdot 100\%$

ή $\pi' = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1''^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi' = 25\%.$

δ. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{τελ})} - \vec{p}_{1(\text{αρχ})}$

ή $\Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1'' - m_1 \vec{v}_1$ ή, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά: $\Delta p_1 = -m_1 |v_1''| - m_1 |v_1|$
ή $\Delta p_1 = -18 \text{ kg m/s}.$

136. α. Από την ελαστική κρούση των δύο σφαιρών έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = +2 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +6 \text{ m/s}.$$

β. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_2'$ στο λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται με τον τοίχο ελαστικά. Συνεπώς, μετά την κρούση με τον τοίχο η ταχύτητά της είναι $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2'$.

Η μεταβολή της ορμής της Σ_2 εξαιτίας της κρούσης με τον τοίχο είναι:

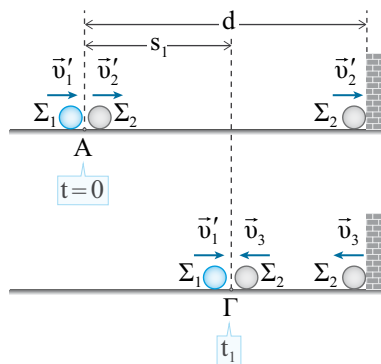
$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{τελ})} - \vec{p}_{2(\text{αρχ})} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_3 - m_2 \vec{v}_2'.$$

ή θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά:

$$\Delta p_2 = -2m_2 |v_2'| \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = -12 \text{ kg m/s},$$

οπότε $|\Delta p_2| = 12 \text{ kg m/s}.$

γ. Η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση με τη σφαίρα Σ_2 συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση (προς τα δεξιά) με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_1'$.



Αφού η σφαίρα Σ_2 συγκρουστεί ελαστικά με τον τοίχο, θα κινηθεί προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2'$ και οι δύο σφαίρες θα συγκρουστούν ξανά τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση Γ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το διάστημα που έχει διανύσει η Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι s_1 , ενώ το διάστημα που έχει διανύσει η Σ_2 στο ίδιο χρονικό διάστημα ($\Delta t = t_1 - 0$) είναι $s_2 = 2d - s_1$.

$$\text{Ισχύουν: } |v'_2| = \frac{2d-s_1}{t_1} \quad (1) \text{ και } |v'_1| = \frac{s_1}{t_1} \quad (2).$$

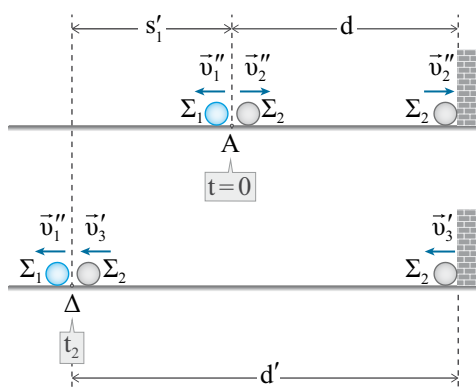
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ έχουμε: } \frac{|v'_2|}{|v'_1|} = \frac{2d-s_1}{s_1} \quad \eta \quad 3 = \frac{2d-s_1}{s_1}$$

$$\dot{\eta}_{s_1} = \frac{d}{2} \quad \dot{\eta}_{s_1} = 2 \text{ m.}$$

Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει $t_1 = 1 \text{ s}$.

δ. Για να συγκρουστούν οι δύο σφαίρες σε απόσταση $d' = 12 \text{ m}$ ($d' > d$) από τον τοίχο, θα πρέπει η σφαίρα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση με τη σφαίρα Σ_2 να αρχίσει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $\bar{u}$.



Έστω ότι οι δύο σφαίρες συγκρούονται ξανά στη θέση Δ τη χρονική στιγμή t_2 , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Το διάστημα που έχει διανύσει η σφαίρα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι $s'_1 = d' - d$, ενώ το διάστημα που έχει διανύσει η σφαίρα Σ_2 είναι $s'_2 = d + d'$.

$$\text{Ισχύουν: } |v_1''| = \frac{s_1'}{t_2} \quad \eta \quad |v_1''| = \frac{d' - d}{t_2} \quad (3)$$

$$|v_2''| = \frac{s_2'}{t_2} \quad \text{and} \quad |v_2''| = \frac{d+d'}{t_2} \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{|v_1''|}{|v_2''|} = \frac{d' - d}{d + d'} \quad \text{et} \quad \frac{|v_1''|}{|v_2''|} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{v_1''}{v_2''} = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{\eta} \frac{\frac{m'_1 - m'_2}{m'_1 + m'_2} v_1}{\frac{2m'_1}{m'_1 + m'_2} v_1} = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{\eta} \frac{m'_1 - m'_2}{2m'_1} = -\frac{1}{2} \quad \dot{\eta} \frac{m'_1}{m'_2} = \frac{1}{2}.$$

137. α. Έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -3 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +2 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $E_{\text{μστ}} = \Delta K,$

$$\dot{\eta} \quad E_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - 0 \quad \dot{\eta} \quad E_{\mu\epsilon\tau} = 16 \text{ J.}$$

γ. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} - \vec{p}_{1(\pi\rho\iota\nu)}$

$$\dot{\eta} \quad \Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \quad \dot{\eta} \quad \Delta p_1 = -16 \text{ kg m/s},$$

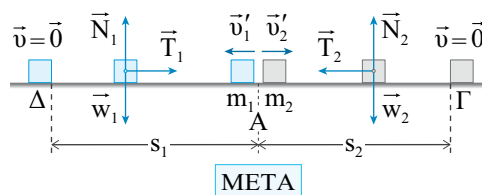
οπότε $|\Delta p_1| = 16 \text{ kg m/s}$.

δ. Από την εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Α στη θέση Δ, όπου ακινητοποιείται, έχουμε:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\gamma} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\dot{q}_1 = 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\dot{\eta} \quad s_1 = 1,5 \text{ m.}$$



Από την εφαρμογή του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, όπου ακινητοποιείται, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } s_2 = 0,5 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων, όταν ακινητοποιηθούν, είναι: $d = s_1 + s_2$ ή $d = 2 \text{ m}$.

138. α. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1'

$$\text{είναι: } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1).$$

Επειδή η ταχύτητα $\vec{v}_1'$ είναι αντίρροπη της ταχύτητας $\vec{v}_1$, ισχύει $v_1' = -|v_1| = -9 \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση (1)

$$\text{προκύπτει: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{β. Έχουμε: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v_2' = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \quad \text{ή } v_2' = +6 \text{ m/s.}$$

Συνεπώς, είναι $|v_2'| = 6 \text{ m/s}$.

$$\text{γ. Έχουμε: } \pi = \frac{K_{2(\text{μετά})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 64\%.$$

δ. Για να υπολογίσουμε το συνολικό διάστημα s_1 που διανύει το σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τις θέσεις Α και Δ της κίνησής του (βλέπε το παρακάτω σχήμα).

$$K_{1(\Delta)} - K_{1(A)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$$

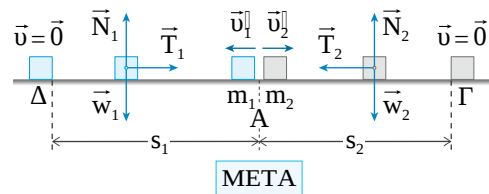
$$\text{ή } s_1 = 40,5 \text{ m.}$$

Για να υπολογίσουμε το συνολικό διάστημα s_2 που διανύει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κίνησής του.

$$K_{2(\Gamma)} - K_{2(A)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } s_2 = 18 \text{ m.}$$



Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων, όταν ακινητοποιηθούν, προκύπτει: $d = s_1 + s_2$

$$\text{ή } d = 58,5 \text{ m.}$$

139. α. Έστω $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1' = +2 \text{ m/s και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_2' = +6 \text{ m/s.}$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

β. Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_2 μεταξύ του σώματος Σ_2 και του οριζόντιου δαπέδου, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

$$K_{2(\text{τελ})} - K_{2(\text{αρχ})} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } \mu_2 = 0,1.$$

γ. Για να υπολογίσουμε το διάστημα s_1 που διανύει το σώμα Σ_1 μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

$$K_{1(\text{τελ})} - K_{1(\text{αρχ})} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0 \quad \text{ή } s_1 = 2 \text{ m}.$$

δ. Έχουμε:

$$Q_{\text{ολ}} = Q_{T_1} + Q_{T_2} \quad \text{ή} \quad Q_{\text{ολ}} = |W_{T_1}| + |W_{T_2}|$$

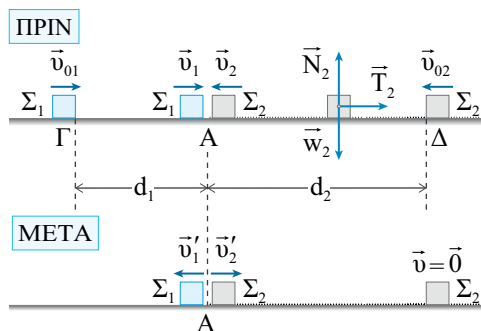
$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = \mu_1 m_1 g s_1 + \mu_2 m_2 g s_2 \quad \text{ή} \quad Q_{\text{ολ}} = 24 \text{ J}.$$

140. α. Έστω $\bar{v}_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Δ στη θέση Α πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{2(A)} - K_{2(\Delta)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = -\mu m_2 g d_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } |\bar{v}_2| = 6 \text{ m/s}.$$



β. Έστω $\bar{v}_2'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Α στη θέση Δ μετά την κρούση έχουμε: $K_{2(\Delta)} - K_{2(A)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } |\bar{v}_2'| = 8 \text{ m/s}.$$

γ. Έστω $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_1'$ οι ταχύτητες του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση αντίστοιχα.

Επειδή το σώμα Σ_1 κινείται πριν από την κρούση στην περιοχή όπου το δάπεδο είναι λείο, η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλή. Συνεπώς, ισχύει: $|\bar{v}_1| = |\bar{v}_{01}|$.

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες, οπότε κατά την (κεντρική και ελαστική) κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες:

$$v_1 = v_2' \quad \text{ή} \quad |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2'| \quad \text{ή} \quad |\bar{v}_1| = 8 \text{ m/s}.$$

$$\text{Άρα: } |\bar{v}_{01}| = 8 \text{ m/s}.$$

δ. Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης του Σ_2 πριν από την κρούση. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 \alpha_2$$

$$\text{ή } \mu m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = \mu g \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 4 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2

συγκρούεται με το Σ_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } |v_2| = |v_{02}| - \alpha_2 t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{|v_{02}| - |v_2|}{\alpha_2}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = 1 \text{ s.}$$

Επειδή το Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση πριν από την κρούση, έχουμε:

$$|v_{01}| = \frac{d_1}{t_1} \quad \text{ή} \quad d_1 = |v_{01}| t_1 \quad \text{ή} \quad d_1 = 8 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \text{ε. Έχουμε: } t_2 - t_1 &= \frac{d_1}{|v'_1|} \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = \frac{d_1}{|v_2|} \\ \text{ή} \quad t_2 - t_1 &= \frac{4}{3} \text{ s.} \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_2 υπολο-

γίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma F v$.

$$\text{Έχουμε: } \left| \frac{dK}{dt} \right|_{t_2} = -T_2 |v|$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{dK}{dt} \right|_{t_2} = -\mu m_2 g [|v'_2| - \alpha_2 (t_2 - t_1)]$$

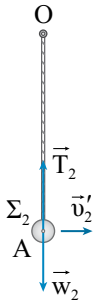
$$\text{ή} \quad \left| \frac{dK}{dt} \right|_{t_2} = -32 \text{ J/s.}$$

$$\mathbf{141. \alpha. Έχουμε: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v'_1 = -4 \text{ m/s και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +4 \text{ m/s.}$$

β. Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα Σ_2 αρχίζει να κινείται κυκλικά.



Στη θέση Α του προηγούμενου σχήματος ισχύ-

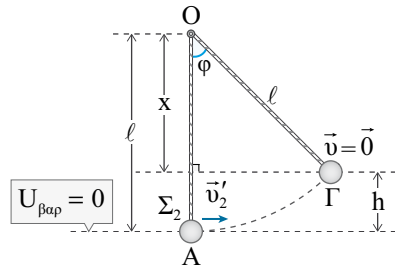
$$\text{ει: } \Sigma F = F_k \quad \text{ή} \quad T_2 - w_2 = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T_2 = m_2 g + \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T_2 = 90 \text{ N.}$$

γ. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η σφαίρα Σ_2 μετά την κρούση:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = 0 + m_2 g h \quad \text{ή} \quad h = 0,8 \text{ m.}$$

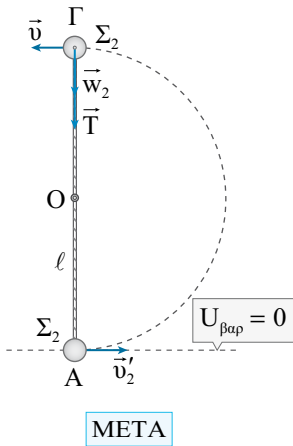


$$\text{Επομένως, είναι: } \sin \varphi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή} \quad \sin \varphi = \frac{\ell - h}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad \sin \varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi = 90^\circ.$$

142. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο ανώτερο σημείο Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στο σημείο Γ είναι: το βάρος του $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$.



Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στη θέση Γ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_\kappa$

$$\text{ή } T + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell} \quad \text{ή } T = \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ_2 ανακύκλωση, πρέπει να φτάσει στη θέση Γ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$

$$\text{ή, λόγω της (1): } \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \geq 0$$

$$\text{ή } \frac{m_2 v^2}{\ell} \geq m_2 g \quad \text{ή } v \geq \sqrt{g\ell} \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στη θέση Γ , ώστε αυτό μόλις να εκτελεί ανακύκλωση είναι:

$$v = \sqrt{g\ell} \quad (3) \quad \text{ή } v = \sqrt{5} \text{ m/s}.$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v'_2 της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις A και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση A .

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$$

$$\text{ή } K_{2(A)} + U_{2(A)} = K_{2(\Gamma)} + U_{2(\Gamma)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g 2\ell$$

ή, λόγω της (3):

$$\frac{1}{2} v_2'^2 = \frac{1}{2} g\ell + 2g\ell$$

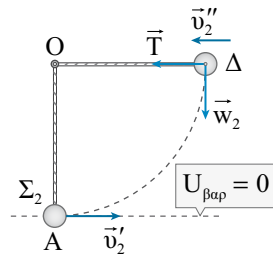
$$\text{ή } v_2' = \sqrt{5g\ell} \quad \text{ή } v_2' = 5 \text{ m/s}.$$

β. Από τη σχέση που δίνει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } m_2 = 5 \text{ kg}.$$

γ. Θα υπολογίσουμε το μέτρο v_2'' της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις A και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά τη κρούση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \quad \text{ή } K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_2''^2 + m_2 g \ell$$

$$\text{ή } v_2'' = \sqrt{15} \text{ m/s}.$$

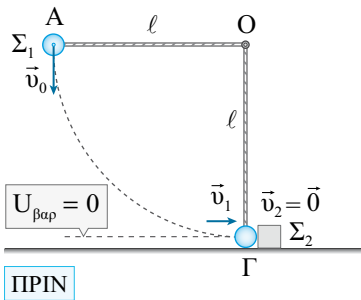
Στη θέση Δ του σώματος Σ_2 ισχύει:

$$T = F_k \quad \text{ή} \quad T = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T = 150 \text{ N.}$$

δ. Έχουμε: $\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = |\Sigma \vec{F}| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \sqrt{T^2 + m_2^2 g^2}$

ή $\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = 50\sqrt{10} \text{ kg m/s}^2.$

143. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σώμα Σ_2 και εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Γ, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$$

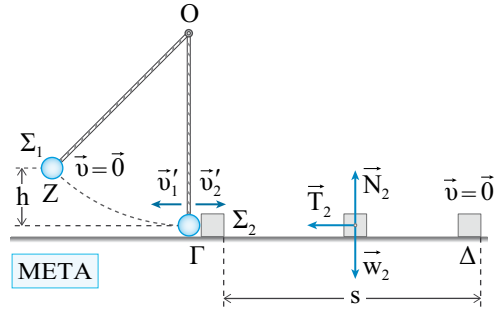
$$\text{ή} \quad K_{I(A)} + U_{I(A)} = K_{I(\Gamma)} + U_{I(\Gamma)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = 5 \text{ m/s.}$$

β. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_2' του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +2 \text{ m/s.}$$

Για να υπολογίσουμε το διάστημα s που διανύει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ_2 μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$$K_{2(\Delta)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad s = \frac{v_2'^2}{2\mu g}$$

$$\text{ή} \quad s = 1 \text{ m.}$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' της σφαίρας Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -3 \text{ m/s.}$$

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος h που φτάνει η σφαίρα Σ_1 πάνω από το οριζόντιο δάπεδο μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της Σ_1 μεταξύ των θέσεων Γ και Ζ.

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(Z)} \quad \text{ή} \quad K_{I(\Gamma)} + U_{I(\Gamma)} = K_{I(Z)} + U_{I(Z)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g h \quad \text{ή} \quad h = \frac{v_1'^2}{2g}$$

$$\text{ή} \quad h = 0,45 \text{ m.}$$

δ. Έχουμε: $\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{I(\text{αρχ})}} \cdot 100\%$

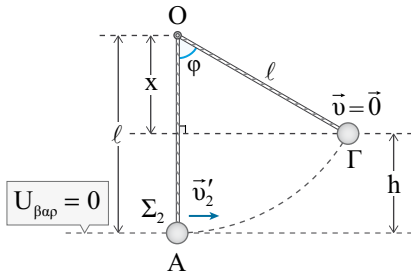
$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 100\%.$$

144. α. Για να πραγματοποιηθεί και δεύτερη κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , θα πρέπει αμέσως μετά την πρώτη μεταξύ τους κρούση το σώμα Σ_1 να ακινητοποιηθεί.

Επομένως, έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ από όπου προκύπτει: $m_2 = m_1$ ή $m_2 = 1 \text{ kg}$.

β. $\pi = 100 \%$.

γ. Ισχύει: $v_2' = v_1$ ή $v_2' = 3 \text{ m/s}$.



Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ της κίνησης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

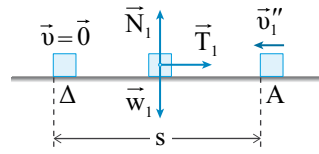
$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g h \quad \text{ή } h = 0,45 \text{ m.}$$

$$\text{Επομένως: } \sin \varphi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή } \sin \varphi = \frac{\ell - h}{\ell}$$

$$\text{ή } \sin \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή } \varphi = 60^\circ.$$

δ. Το σώμα Σ_2 , αφού ακινητοποιηθεί στιγμιαία στη θέση Γ, θα επιστρέψει στη θέση Α με ταχύτητα μέτρου $|v_2'|$ και θα ξανασυγκρουστεί με το σώμα Σ.

Επειδή $m_1 = m_2$ και οι κρούσεις μεταξύ των δύο σωμάτων είναι κεντρικές και ελαστικές, το μέτρο $|v_1''|$ της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση του με το Σ_2 θα είναι: $|v_1''| = |v_2'|$ ή $|v_1''| = 3 \text{ m/s}$.



Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Δ έχουμε: $K_{I(\Delta)} - K_{I(A)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1''^2 = -\mu m_1 g s + 0 + 0 \quad \text{ή } s = 1,5 \text{ m.}$$

145. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή } m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_\Gamma^2$$

$$\text{ή } v_\Gamma = \sqrt{2gR} \quad \text{ή } v_\Gamma = 10 \text{ m/s.}$$

β. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Δ έχουμε:

$$K_{I(\Delta)} - K_{I(\Gamma)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_\Gamma^2 - \frac{1}{2} m_1 v_\Gamma^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_\Gamma^2 - 2\mu g s_1} \quad \text{ή } v_1 = 8 \text{ m/s.}$$

Για την ελαστική κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισχύει:

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

$$\text{προκύπτουν: } v_1' = -10 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_2' = +2 \text{ m/s.}$$

$$\text{Άρα: } |v_1'| = 10 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad |v_2'| = 2 \text{ m/s.}$$

$$\text{γ. Έχουμε: } \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{τελ})} - \vec{p}_{2(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 \quad \text{ή } \Delta p_2 = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = 3 \cdot [2 - (-4)] \text{ kg m/s}$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = +18 \text{ kg m/s.}$$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 έχει μέτρο 18 kg m/s και φορά προς τα δεξιά.

δ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{K_{1(\text{μετά})} - K_{1(\text{πριν})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 56,25\%.$$

146. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κυκλική κίνηση της σφαίρας Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\chi(A)} = E_{\mu\chi(\Gamma)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } |v_1| = \sqrt{v_0^2 + 2gR} \quad \text{ή } |v_1| = 12 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v_1' η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Δ έχουμε: $E_{\mu\chi(\Gamma)} = E_{\mu\chi(\Delta)}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g h \quad \text{ή } |v_1'| = \sqrt{2gh}$$

$$\text{ή } |v_1'| = 4 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } -4 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 12 \quad \text{ή } \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma. \text{ Έχουμε: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_2' = 8 \text{ m/s.}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } s_2 = 6,4 \text{ m.}$$

δ. Επειδή κατά την κίνηση της σφαίρας Σ_1 στο λείο τεταρτοκύκλιο η μηχανική της ενέργεια διατηρείται σταθερή, η σφαίρα Σ_1 , αφού ακινητοποιηθεί στιγμιαία μετά την κρούση στο σημείο Δ, θα επιστρέψει στο σημείο Γ με ταχύτητα μέτρου $|v_1'|$.

Για να εξετάσουμε αν η Σ_1 συγκρουστεί για δεύτερη φορά με τη Σ_2 , θα πρέπει να υπολογίσουμε το διάστημα s_1 που διανύει η Σ_1 στο οριζόντιο δάπεδο από τη χρονική στιγμή στην οποία επιστρέφει στο σημείο Γ μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 στο οριζόντιο δάπεδο έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 m_1 g s_1 + 0 + 0 \quad \text{ή } s_1 = 8 \text{ m.}$$

Επειδή $s_1 > s_2$, οι δύο σφαίρες θα συγκρουστούν για 2η φορά.

147. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Γ. Είναι: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1}$

$$\begin{aligned} \text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 &= m_1 g \eta \mu \phi s_1 - \mu_1 m_1 g \sigma \nu \eta \phi s_1 + 0 \\ \text{ή } v_1 &= 4 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

β. Για την ελαστική κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισχύει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -2 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +2 \text{ m/s.}$$

γ. Το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση κινείται προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Έστω s το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 στο κεκλιμένο επίπεδο μετά την κρούση μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Γ μέχρι τη θέση Δ, όπου ακινητοποιείται στιγμιαία: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g \sigma \nu \eta \phi s - m_1 g \eta \mu \phi s$$

$$\text{ή} \quad s = 0,25 \text{ m.}$$

Η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Δ είναι: $d = s_1 - s$ ή $d = 3,75 \text{ m.}$

δ. Για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε: $v = v'_2 + \alpha \Delta t$

$$\text{ή} \quad 2 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} + \alpha \Delta t \quad \text{ή} \quad \alpha = 0.$$

Συνεπώς, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα: $\Sigma F_x = 0$ ή $w_{2x} = T_2$

$$\text{ή} \quad m_2 g \eta \mu \phi = \mu_2 m_2 g \sigma \nu \eta \phi \quad \text{ή} \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

148. α. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία το εκτοξεύσαμε από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση με το σώμα Σ_2 .

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} &= W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1} \\ \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 &= -m_1 g \eta \mu \phi s_1 \\ &\quad - \mu_1 m_1 g \sigma \nu \eta \phi s_1 + 0 \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad |v_1| = \sqrt{v_0^2 - 2g s_1 (\eta \mu \phi + \mu_1 \sigma \nu \eta \phi)}$$

$$\text{ή} \quad |v_1| = 8 \text{ m/s.}$$

β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία φτάνει με μηδενική ταχύτητα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} &= W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1} \\ \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 &= m_1 g \eta \mu \phi s_1 - \mu_1 m_1 g \sigma \nu \eta \phi s_1 \\ \text{ή} \quad |v_1'| &= \sqrt{2g s_1 (\mu_1 \sigma \nu \eta \phi - \eta \mu \phi)} \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad |v_1'| = 4 \text{ m/s.}$$

$$\text{γ. Έχουμε: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad -4 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 8 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{δ. Έχουμε: } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +4 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } \pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

ε. Έστω s_2 το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_2 στο κεκλιμένο επίπεδο από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση αυτήν έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2} + W_{T_2} + W_{N_2}$ ή

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 g \eta \mu \phi s_2 - \mu_2 m_2 g \sigma \nu \eta \phi s_2 + 0$$

$$\text{ή } s_2 = \frac{v_2'^2}{2g(\eta \mu \phi + \mu_2 \sigma \nu \eta \phi)} \quad \text{ή } s_2 = 0,8 \text{ m.}$$

Η απόσταση του σημείου Δ, στο οποίο ακινητοποιείται στιγμιαία το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι: $d = s_1 + s_2$ ή $d = 4 \text{ m}$.

Άρα το μέγιστο ύψος h_{max} πάνω από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου στο οποίο φτάνει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση προκύπτει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h_{\text{max}}}{d} \quad \text{ή } h_{\text{max}} = 2 \text{ m.}$$

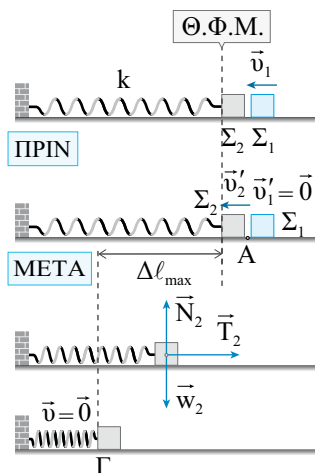
149. α. Έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή } v_1' = 0 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v_2' = +2 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\Delta \ell_{\text{max}}$ η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση μεταξύ των θέσεων Α και Γ, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



$$K_{2(\Gamma)} - K_{2(A)} = W_{T_2} + W_{F_{\text{ελ}}} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g \Delta \ell_{\text{max}} + U_{\text{ελ}(A)} - U_{\text{ελ}(\Gamma)} + 0 + 0$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g \Delta \ell_{\text{max}} + 0 - \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\text{max}})^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\text{max}})^2 + \mu_2 m_2 g \Delta \ell_{\text{max}} - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0$$

$$\text{ή } 25 (\Delta \ell_{\text{max}})^2 + 5 \Delta \ell_{\text{max}} - 2 = 0 \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta \ell_{\text{max}} = 0,2 \text{ m}, \quad \Delta \ell_{\text{max}} = -0,4 \text{ m}$$

Δεκτή λύση είναι η $\Delta \ell_{\text{max}} = 0,2 \text{ m}$.

γ. Έχουμε: $Q_T = |W_T| = \mu_2 m_2 g \Delta \ell_{\text{max}}$

$$\text{ή } Q_T = 2 \text{ J.}$$

δ. Τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση είναι: $F_{\text{ελ}} = k \Delta \ell_{\text{max}}$ ή $F_{\text{ελ}} = 20 \text{ N}$.

Η οριακή στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_2 είναι: $T_{op} = \mu_s N_2$ ή $T_{op} = \mu_s m_2 g$ ή $T_{op} = 10 \text{ N}$.

Επειδή είναι $F_{ελ} > T_{op}$, το σώμα Σ_2 θα αρχίσει να κινείται ξανά προς τα αριστερά.

Έστω v' το μέτρο της ταχύτητας με την οποία επιστρέφει το σώμα Σ_2 στο σημείο Α όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μεταξύ των θέσεων Γ και Α έχουμε:

$$K_{2(A)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{F_{ελ}} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v'^2 = -\mu_2 m_2 g \Delta \ell_{\max} + \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } v' = \sqrt{\frac{k}{m_2} (\Delta \ell_{\max})^2 - 2\mu_2 g \Delta \ell_{\max}} \quad \text{ή } v' = 0.$$

Άρα οριακά δεν θα συμβεί δευτέρα κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων.

150. α. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v'_1 και v'_2 που έχουν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ (1) και $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ (2).

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$-\sqrt{10} = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} v_1 \quad \text{ή } v_1 = +3\sqrt{10} \text{ m/s}.$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g d + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_0 = 10 \text{ m/s}.$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{2v_1}{3} \quad \text{ή } v'_2 = 2\sqrt{10} \text{ m/s}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{800}{9} \%.$$

γ. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_1 κατά τη διάρκεια της κίνησής του στο οριζόντιο δάπεδο. Έχουμε: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1$

$$\text{ή } T_1 = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή } \mu m_1 g = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή } \alpha_1 = \mu g$$

$$\text{ή } \alpha_1 = 5 \text{ m/s}^2.$$

Για την κίνηση του Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε:

$$v_1 = v_0 - \alpha_1 t_1 \quad \text{ή } t_1 = \frac{v_0 - v_1}{\alpha_1} \quad \text{ή } t_1 = 0,08 \text{ s}.$$

Για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται έχουμε: $0 = |v'_1| - \alpha_1 (t_2 - t_1)$ ή $t_2 - t_1 = \frac{|v'_1|}{\alpha_1}$

$$\text{ή } t_2 = t_1 + \frac{|v'_1|}{\alpha_1} \quad \text{ή } t_2 = 0,72 \text{ s}.$$

δ. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο αποκτά τη μέγιστη συσπείρωσή του, όταν το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{F_{ελ}} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -T_2 \Delta \ell_{\max} + U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} + 0$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g \Delta \ell_{\max} + 0 - \frac{1}{2}k(\Delta \ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } 52,5(\Delta \ell_{\max})^2 + 5\Delta \ell_{\max} - 20 = 0 \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{από την οποία προκύπτει: } \Delta \ell_{\max} = \frac{12}{21} \text{ m.}$$

151. α. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v_1' και v_2' που έχουν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = 0 \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +10 \text{ m/s.}$$

β. Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου $\Delta \ell_{\max}$ επιτυγχάνεται, όταν τα σώματα Σ_2 και Σ_3 αποκτήσουν κοινή ταχύτητα $\bar{v}$.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 έχουμε: $\bar{p}_{αρχ} = \bar{p}_{τελ}$

$$\text{ή } m_2 v_2' = (m_2 + m_3) \bar{v} \quad \text{ή} \quad \bar{v} = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη συσπίρωση $\Delta \ell_{\max}$ του ελατηρίου, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία τα Σ_2 και Σ_3 αποκτούν κοινή ταχύτητα $\bar{v}$.

$$E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)}$$

$$\text{ή } K_{αρχ} + U_{ελ(αρχ)} = K_{τελ} + U_{ελ(τελ)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2 \bar{v}^2 + \frac{1}{2}m_3 \bar{v}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta \ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_{\max} = 0,5 \text{ m.}$$

δ. Το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 είναι μονωμένο. Έστω $\bar{v}_2$ και $\bar{v}_3$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_2'$, έχουμε:

$$\bar{p}_{ολ(αρχ)} = \bar{p}_{ολ(τελ)} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2' = m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3$$

$$\text{ή } m_2 (v_2' - \bar{v}_2) = m_3 \bar{v}_3 \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα των δύο σωμάτων έχουμε: $E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2 \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \bar{v}_3^2$$

$$\text{ή } m_2 (v_2'^2 - \bar{v}_2^2) = m_3 \bar{v}_3^2$$

$$\text{ή } m_2 (v_2' - \bar{v}_2)(v_2' + \bar{v}_2) = m_3 \bar{v}_3^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (2) και (1) προκύπτει: $v_2' + \bar{v}_2 = \bar{v}_3 \quad (3).$

Από τις (1) και (3) προκύπτουν:

$$\bar{v}_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_2' \quad \text{ή} \quad \bar{v}_2 = -6 \text{ m/s,}$$

$$\text{οπότε: } |\bar{v}_2| = 6 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$\bar{v}_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2' \quad \text{ή} \quad \bar{v}_3 = +4 \text{ m/s.}$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος

οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων που είναι στερεωμένα στα άκρα του ταυτίζονται με τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων που προκύπτουν από τους τύπους της ελαστικής κρούσης.

152. α. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)}$$

$$\text{ή } mv_0 = (M+m)v \quad \text{ή } v = 4 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_{βλ} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}$ ή

$$\Delta p_{βλ} = mv - mv_0 \quad \text{ή } \Delta p_{βλ} = -19,6 \text{ kg m/s,}$$

$$\text{οπότε: } |\Delta p_{βλ}| = 19,6 \text{ kg m/s.}$$

γ. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N + W_T$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(M+m)v^2 = 0 + 0 - \mu(M+m)gs$$

$$\text{ή } s = 2 \text{ m.}$$

$$\text{δ. Έχουμε: } \pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 98\%.$$

ε. Έχουμε: $Q_{ολ} = Q_K + Q_T$

$$\text{ή } Q_{ολ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} + |W_T|$$

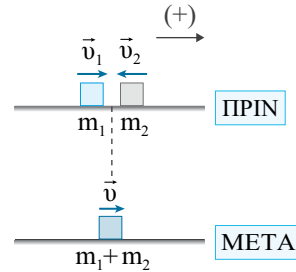
$$\text{ή } Q_{ολ} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \mu(M+m)gs$$

$$\text{ή } Q_{ολ} = 2.000 \text{ J.}$$

153. α. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v \quad \text{ή } v = 2 \text{ m/s.}$$



β. Έχουμε: $E_{απ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } E_{απ} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$\text{ή } E_{απ} = 12 \text{ J.}$$

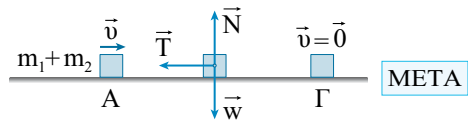
γ. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(μετά)} - \vec{p}_{1(πριν)}$

$$\text{ή } \Delta p_1 = m_1v - m_1v_1 \quad \text{ή } \Delta p_1 = -4 \text{ kg m/s}$$

$$\text{και } \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(μετά)} - \vec{p}_{2(πριν)}$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = m_2v - (-m_2v_2) \quad \text{ή } \Delta p_2 = +4 \text{ kg m/s.}$$

δ. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Α όπου έγινε η κρούση μέχρι τη θέση Γ στην οποία ακινητοποιείται. Έχουμε:



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } \mu = 0,2.$$

154. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Το μέτρο a της επιβράδυνσης του συσσωματώματος κατά την ολίσθηση στο οριζόντιο δάπεδο μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a$ ή $T = (m_1 + m_2)a$ ή $\mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$ ή $a = 3 \text{ m/s}^2$. Για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία τελικά ακινητοποιείται, έχουμε:

$$v' = v - at_1 \quad \text{ή} \quad 0 = v - at_1 \quad \text{ή} \quad v = 6 \text{ m/s}.$$

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 + m_2 (-v_2) = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad m_2 = 1 \text{ kg}.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{Q_T}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{|W_T|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \quad (1).$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_w + W_N$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = W_T + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad W_T = -90 \text{ J}.$$

Επομένως, από την (1) προκύπτει: $\pi = 36\%$.

δ. Το διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί υπολογίζεται από τη σχέση: $W_T = -\mu(m_1 + m_2)gs$ ή $s = 6 \text{ m}$.

Θα υπολογίσουμε το μέτρο v'' της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 , εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v''^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = -\mu(m_1 + m_2)g \frac{s}{2} + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v'' = 3\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_2 ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -\mu(m_1 + m_2)gv''$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -45\sqrt{2} \text{ J/s}.$$

155. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε με το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Γ:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = -m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s}.$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2 της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη θέση Β στη θέση Γ:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{N_2} + W_{w_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = -\mu_1 m_2 g (d - s_1) + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_2 = 10 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v = -3 \text{ m/s.}$$

Δηλαδή το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση αρχίζει να κινείται προς το σημείο Α.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{τελ})} - \vec{p}_{2(\text{αρχ})}$

$$\text{ή } \Delta p_2 = m_2 v - m_2 v_2$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = 1 \text{ kg} (-3 \text{ m/s}) - 1 \text{ kg} (-10 \text{ m/s})$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = +7 \text{ kg m/s.}$$

γ. Για να υπολογίσουμε το ολικό διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη θέση όπου έγινε η κρούση μέχρι τη θέση Δ όπου ακινητοποιείται.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = -\mu_2 (m_1 + m_2) g s + 0 + 0$$

$$\text{ή } s = 4,5 \text{ m.}$$

Άρα η απόσταση (ΑΔ) είναι:

$$(ΑΔ) = s_1 - s \quad \text{ή } (ΑΔ) = 0.$$

δ. Το μέτρο α_1 της επιβράδυνσης του Σ_1 πριν από την κρούση είναι: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1$

$$\text{ή } T_1 = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή } \mu_1 m_1 g = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή } \alpha_1 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Το μέτρο α_2 της επιβράδυνσης του Σ_2 πριν από την κρούση είναι: $\Sigma F_x = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή } T_2 = m_2 \alpha_2$

$$\text{ή } \mu_1 m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή } \alpha_2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Το χρονικό διάστημα Δt_1 στο οποίο κινήθηκε το σώμα Σ_1 πριν συγκρουστεί με το σώμα Σ_2 προκύπτει από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$v_1 = v_{01} - \alpha_1 \Delta t_1 \quad \text{ή } \Delta t_1 = 1 \text{ s.}$$

Το χρονικό διάστημα Δt_2 στο οποίο κινήθηκε το σώμα Σ_2 πριν συγκρουστεί με το σώμα Σ_1 προκύπτει από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$v_2 = v_{02} - \alpha_2 \Delta t_2 \quad \text{ή } \Delta t_2 = 2 \text{ s.}$$

Συνεπώς, η χρονική διαφορά με την οποία εκτοξεύτηκαν τα δύο σώματα από τις αρχικές τους θέσεις είναι: $\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 \quad \text{ή } \Delta t = 1 \text{ s.}$

156. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} (M + m) v^2 = -\mu (M + m) g s + 0 + 0$$

$$\text{ή } v = 20 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή } m v_0 = (M + m) v$$

$$\text{ή } v_0 = 250 \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}}{K_{\text{ολ(πριν)}}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (M + m) v^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 92\%.$$

γ. Το μέτρο α της επιβράδυνσης του συσσωματώματος είναι:

$$\Sigma F_x = (M+m)\alpha \quad \text{ή} \quad T = (M+m)\alpha$$

$$\text{ή} \quad \mu(M+m)g = (M+m)\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

Το μέτρο v'_1 της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει:

$$v'_1 = v - \alpha t_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = 5 \text{ m/s}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα εξαιτίας της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t_1

$$\text{είναι: } \frac{dQ_T}{dt} = T v'_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dQ_T}{dt} = \mu(M+m)g v'_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ_T}{dt} = 125 \text{ J/s}.$$

δ. Έστω v' το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m v'_0 = (M+m) v'$$

$$\text{ή} \quad v' = \frac{m v'_0}{M+m} \quad (1).$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi' = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi' = \frac{\frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{1}{2} (M+m) v'^2}{\frac{1}{2} m v_0'^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi' = \left[1 - \frac{(M+m) v'^2}{m v_0'^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή, λόγω της (1): } \pi' = \left(1 - \frac{m}{M+m} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi' = \frac{M}{M+m} \cdot 100\% \quad (2).$$

Από τη (2) προκύπτει ότι το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του βλήματος κατά την κρούση είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν από την κρούση. Συνεπώς, θα είναι $\pi' = 92\%$.

157. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v = 5 \text{ m/s}.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad \text{ή} \quad K = 75 \text{ J}.$$

β. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τον τύπο: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(τελ)} - \vec{p}_{2(αρχ)}$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = m_2 v - m_2 v_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = 2(+5) \text{ kg m/s} - 2(-5) \text{ kg m/s}$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_2 = +20 \text{ kg m/s, οπότε:}$$

$$|\Delta p_2| = 20 \text{ kg m/s}.$$

Το μέτρο $\vec{F}$ της μέσης δύναμης που ασκήθηκε στο σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι: $\vec{F} = \frac{|\Delta p_2|}{\Delta t}$ ή $\vec{F} = 1.000 \text{ N}.$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 33,3 \%.$$

δ. Το συνολικό διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη θέση όπου έγινε η κρούση μέχρι τη θέση όπου ακινητοποιείται. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } s = 2,5 \text{ m.}$$

158. α. Το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Γ. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -\mu m_1gs_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1v_1 = p$$

$$\text{ή } p = 20 \text{ kg m/s.}$$

β. Το συνολικό διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα από τη θέση Γ, όπου έγινε η κρούση, μέχρι τη θέση Δ, όπου ακινητοποιείται, είναι: $s = d - s_1$ ή $s = 2 \text{ m}$.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Γ στη θέση Δ έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w \quad \text{ή}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\mu_1(m_1 + m_2)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_1 + m_2} = \mu_1(m_1 + m_2)gs$$

$$\text{ή } \mu_1 = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)^2 gs} \quad \text{ή } \mu_1 = 0,1.$$

γ. Έχουμε: $p = (m_1 + m_2)v$ ή $v = 2 \text{ m/s}$. Επο-

$$\text{μένως: } \frac{Q_K}{Q_T} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\mu_1(m_1 + m_2)gs}$$

$$\text{ή } \frac{Q_K}{Q_T} = 1.$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

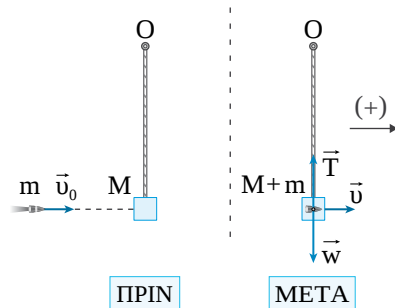
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv' \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Tv'$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -\frac{dQ_T}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -10 \text{ J/s.}$$

159. α. Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$ του βλήματος πριν από την κρούση.

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m\vec{v}_0 = (M + m)\vec{v}$$

$$\text{ή } v = 4 \text{ m/s.}$$



Επομένως: $K = \frac{1}{2}(M+m)v^2$ ή $K = 32 \text{ J}$.

β. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

Επομένως: $\Sigma F = F_k$ ή $T - w = \frac{(M+m)v^2}{\ell}$

ή $T = (M+m)g + \frac{(M+m)v^2}{\ell}$ ή $T = 80 \text{ N}$.

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

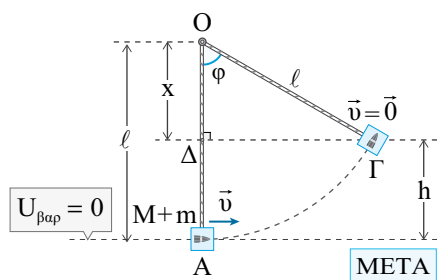
$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\%$$

ή $\pi = 95\%$.

δ. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στη θέση Γ η οποία βρίσκεται σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτερη θέση Α της τροχιάς του.

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε για την κίνηση του συσσωματώματος μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(Γ)} \text{ ή } K_A + U_A = K_Γ + U_Γ \quad (1).$$



Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που

διέρχεται από το σημείο Α, από την (1) έχουμε: $\frac{1}{2}(M+m)v^2 + 0 = 0 + (M+m)gh$

ή $h = 0,8 \text{ m}$.

Έστω φ η μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος από την αρχική κατακόρυφη θέση του.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε:

$$\sin \phi = \frac{x}{\ell} \text{ ή } \sin \phi = \frac{\ell - h}{\ell}$$

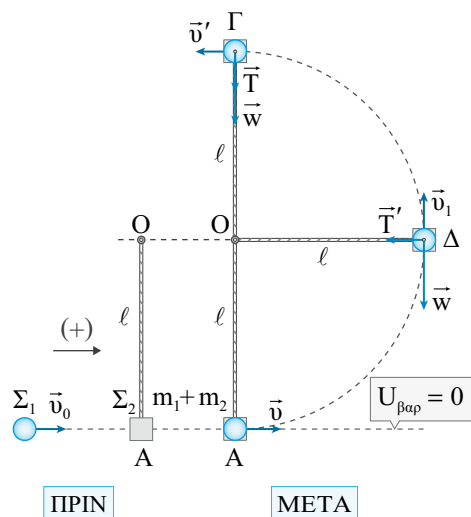
$$\text{ή } \sin \phi = \frac{1}{2} \text{ ή } \phi = 60^\circ.$$

160. α. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και υ' το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς του.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στο σημείο Γ δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

Επομένως: $\Sigma F = F_k$ ή $T + w = \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{\ell}$

$$\text{ή } T = \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g \quad (1).$$



Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα ανακύκλωση, πρέπει να φτάσει στη θέση Γ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, στη θέση Γ πρέπει να ισχύει $T \geq 0$ ή, λόγω της (1):

$$\frac{(m_1 + m_2)v'^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g \geq 0 \quad \text{ή} \quad v' \geq \sqrt{g\ell},$$

$$\text{οπότε: } v'_{\min} = \sqrt{g\ell} \quad \text{ή} \quad v'_{\min} = \sqrt{5} \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\min}^2 + (m_1 + m_2)g2\ell$$

$$\text{ή} \quad v = 5 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v \quad \text{ή} \quad v_0 = 20 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v - m_1 v_0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -7,5 \text{ kg m/s,}$$

$$\text{οπότε: } |\Delta p_1| = 7,5 \text{ kg m/s.}$$

γ. Έχουμε: $Q = K_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} - K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$

$$\text{ή} \quad Q = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad \text{ή} \quad Q = 75 \text{ J.}$$

δ. Το μέτρο v_1 της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από τη θέση Δ, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά μετά την κρούση, υπολογίζεται εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Δ της κυκλικής κίνησης του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$E_{\mu\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + (m_1 + m_2)g\ell$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{15} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος στη θέση Δ είναι:

$$\frac{dK}{dt} = -(m_1 + m_2)gv_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -20\sqrt{15} \text{ J/s.}$$

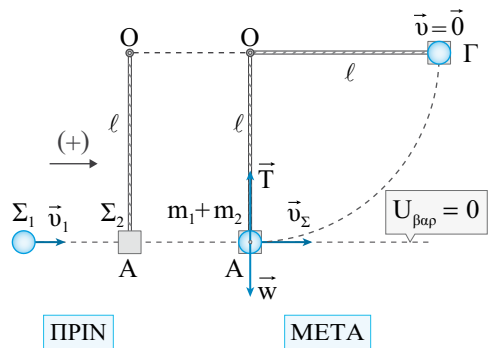
161. α. Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Α αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη θέση Γ, όπου το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο, έχουμε:

$$E_{\mu\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\Sigma^2 = (m_1 + m_2)g\ell$$

$$\text{ή} \quad v_\Sigma = \sqrt{2g\ell} \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 4 \text{ m/s.}$$



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\Sigma$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 20 \text{ m/s.}$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι ίσος με την κεντρομόλο δύναμη που δρα στο συσσωμάτωμα στη θέση Α. Επομένως, είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |F_k| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = \frac{(m_1 + m_2) v_{\Sigma}^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = 200 \text{ kg m/s}^2.$$

γ. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος στη θέση όπου το νήμα σχηματίζει για πρώτη φορά μετά την κρούση γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την αρχική κατακόρυφη θέση του, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Δ: $E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)}$

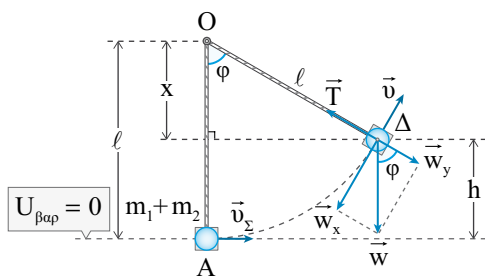
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + (m_1 + m_2)gh$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} v_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2} v^2 + g(\ell - x)$$

$$\text{ή} \quad v_{\Sigma}^2 = v^2 + 2g(\ell - x)$$

$$\text{ή} \quad v^2 = v_{\Sigma}^2 - 2g(\ell - \ell \sin\varphi)$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{v_{\Sigma}^2 - 2g\ell(1 - \sin\varphi)} \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{8} \text{ m/s}.$$



Στη θέση Δ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα κατά την ακτινική διεύθυνση δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma \vec{F}_{\alpha\kappa\tau} = \vec{F}_\kappa$

$$\text{ή} \quad T - W_y = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T - (m_1 + m_2)g \sin\varphi = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = (m_1 + m_2)g \sin\varphi + \frac{(m_1 + m_2) v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = 150 \text{ N}.$$

162. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Δ και Γ πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = -\mu m_1 g d + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 6 \text{ m/s}.$$

β. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Α έως τη θέση Γ έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 + m_2 g R = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{ή} \quad v_2 = 5 \text{ m/s}.$$

γ. Το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Α της κυκλικής κίνησης του μετά την κρούση.

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g R$$

$$\text{ή} \quad v = 4 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:

$$\bar{p}_{ολ(\piριν)} = \bar{p}_{ολ(\μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } \frac{m_1}{m_2} = 4,5.$$

δ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 52,94\%.$$

163. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση έως τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία. Είναι:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_N + W_w \quad \text{ή}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\mu(m_1 + m_2)g \sin \varphi s_2 + 0 - (m_1 + m_2)g \mu \cos \varphi s_2$$

$$\text{ή } v = 3 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v_1 = 5 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } \pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{αρχ}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad (1).$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = -m_1 g \mu \varphi s_1 - \mu m_1 g \sin \varphi s_1 + 0$$

$$\text{ή } v_0 = 10 \text{ m/s.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών στην (1) προκύπτει: $\pi = 10\%$.

$$\text{γ. Έχουμε: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή } \frac{dp}{dt} = -(w + T)$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -(m_1 + m_2)g \mu \varphi - \mu(m_1 + m_2)g \sin \varphi$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -75 \text{ kg m/s}^2.$$

$$\text{δ. Έχουμε: } Q_{ολ} = Q_K + Q_{T_1} + Q_T$$

$$\text{ή } Q_{ολ} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \mu m_1 g \sin \varphi s_1 + \mu(m_1 + m_2)g \sin \varphi s_2$$

$$\text{ή } Q_{ολ} = 120 \text{ J.}$$

164. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g \mu \varphi s_1 - \mu m_1 g \sin \varphi s_1 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = 5 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\Sigma \quad \text{ή } v_\Sigma = 4 \text{ m/s.}$$

Επομένως: $Q_k = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } Q_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\Sigma}^2$$

$$\text{ή } Q_k = 10 \text{ J.}$$

γ. Επειδή $v = v_{\Sigma}$, συμπεραίνουμε ότι μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα μέχρι να φτάσει στη βάση του. Συνεπώς, ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g \mu \phi - \mu (m_1 + m_2) g \sigma \nu \phi = 0$$

$$\text{ή } \mu = \epsilon \phi \phi \quad \text{ή } \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

δ. Το διάστημα s_2 που διανύει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$s_2 = v_{\Sigma} \Delta t \quad \text{ή } s_2 = 5 \text{ m.}$$

Έστω h το αρχικό ύψος του σώματος Σ_1 πάνω από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Ισχύει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h}{s_1 + s_2} \quad \text{ή } h = 5 \text{ m.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{Q_{T_1} + Q_k + Q_T}{U_{αρχ}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{1}{m_1 g h} \left[\mu_1 m_1 g \sigma \nu \phi s_1 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\Sigma}^2 + \mu (m_1 + m_2) g \sigma \nu \phi s_2 \right]$$

$$\text{ή } \pi = 92,5\%.$$

165. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κυκλική κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση

έχουμε: $E_{μ\eta\chi(αρχ)} = E_{μ\eta\chi(τελ)}$

$$\text{ή } m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή } m_1 g \ell (1 - \sigma \nu \eta \phi) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } v_1 = 6 \text{ m/s.}$$

Επειδή $m_1 = m_2$ και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Επομένως: $v'_2 = v_1 = 6 \text{ m/s.}$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_3 .

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_1 μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_3 έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu_1 m_2 g s + 0 + 0$$

$$\text{ή } v = 5 \text{ m/s.}$$

Έστω v_{Σ} η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_3 . Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_2 v = (m_2 + m_3) v_{\Sigma} \quad \text{ή } v_{\Sigma} = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη συσπείρωση $\Delta \ell_{\max}$ του ελατηρίου, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την πλαστική κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_3 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώ-

τη φορά μετά την κρούση του Σ_2 με το Σ_3 .

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_{F_{\text{ελ}}} + W_w + W_N$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)v_{\Sigma}^2 = -\mu_2(m_2 + m_3)g\Delta\ell_{\text{max}}$$

$$-\frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\text{max}})^2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } 15(\Delta\ell_{\text{max}})^2 + 10\Delta\ell_{\text{max}} - 40 = 0 \text{ από την}$$

$$\text{οποία προκύπτει τελικά: } \Delta\ell_{\text{max}} = \frac{4}{3} \text{ m.}$$

δ. Έχουμε: $Q_{\text{ολ}} = Q_{T_1} + Q_{\kappa(\Sigma_2 - \Sigma_3)} + Q_T$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = \mu_1 m_2 g s + \frac{1}{2} m_2 v^2 - \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v_{\Sigma}^2$$

$$+ \mu_2 (m_2 + m_3) g \Delta\ell_{\text{max}}$$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = \frac{136}{3} \text{ J.}$$

166. α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του κιβωτίου αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας του βλήματος πριν από την κρούση, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ(μετά)}} \text{ ή } m v_0 = M v_1 + m v$$

$$\text{ή } v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $Q_{\kappa} = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}$

$$\text{ή } Q_{\kappa} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \left(\frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$\text{ή } Q_{\kappa} = 2.960 \text{ J.}$$

γ. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κιβωτίου από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} M v_1^2 = W_T \text{ ή } W_T = -40 \text{ J.}$$

Το ποσό θερμότητας που εκλύεται κατά την ολίσθηση του κιβωτίου στο δάπεδο λόγω της τριβής ολίσθησης που ασκείται από το δάπεδο είναι: $Q_T = |W_T| = 40 \text{ J.}$

δ. Έχουμε: $|W_T| = T s \text{ ή } T = 25 \text{ N.}$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του κιβωτίου κατά την ολίσθησή του στο δάπεδο είναι:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \Sigma \bar{F} \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -T \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -25 \text{ kg m/s}^2.$$

167. α. Το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κίνησής του πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = 8 \text{ m/s.}$$

β. Το μέτρο v'_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Γ πίσω στη θέση Α.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1' = 6 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\text{ή } v'_2 = -2,5 \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$K_{ολ(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{ή } K_{ολ(πριν)} = 104 \text{ J.}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή } K_{ολ(μετά)} = 30,5 \text{ J.}$$

Επειδή $K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετά)}$, η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ανελαστική.

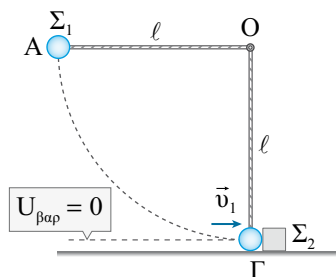
δ. Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης ισούται με την απώλεια της κινητικής του ενέργειας εξαιτίας της κρούσης.

$$E_{απ(\Sigma_1)} = K_{1(πριν)} - K_{1(μετά)}$$

$$\text{ή } E_{απ(\Sigma_1)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$

$$\text{ή } E_{απ(\Sigma_1)} = 14 \text{ J.}$$

168. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



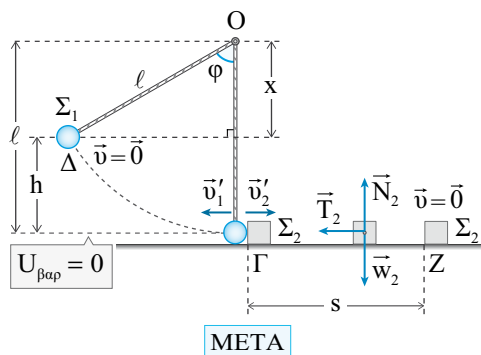
$$E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)}$$

$$\text{ή } K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$\text{ή } 0 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{2g\ell} \quad \text{ή } v_1 = 10 \text{ m/s.}$$

β. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v'_1 της ταχύτητας του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση, θα εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία.



$$E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)} \quad \text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h$$

$$\text{ή } v_1' = \sqrt{2gh} \quad \text{ή } v_1' = \sqrt{2g(\ell - x)}$$

$$\text{ή } v_1' = \sqrt{2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\phi)} \quad \text{ή } v_1' = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_2' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2'$ ή $v_2' = 2 \text{ m/s}$.

$$\text{Επομένως: } K_{ολ(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή } K_{ολ(πριν)} = 50 \text{ J και}$$

$$K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή } K_{ολ(μετά)} = 22 \text{ J.}$$

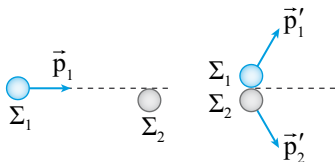
Επειδή $K_{ολ(μετά)} \neq K_{ολ(πριν)}$, η κρούση είναι ανελαστική.

δ. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση από τη θέση Γ, όπου έγινε η κρούση, μέχρι τη θέση Ζ, όπου ακινητοποιείται, έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{T_2} + W_{N_2} + W_{w_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s + 0 + 0 \quad \text{ή } s = 1 \text{ m.}$$

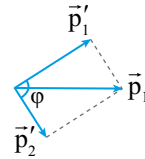
169. α. Οι ορμές $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση.

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (1).$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), από το διανυσματικό άθροισμα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των δύο σφαιρών μετά την κρούση προκύπτει η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση.



Συνεπώς, για το μέτρο της ορμής $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση ισχύει:

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \varphi} \quad (2), \quad \text{όπου } \varphi \text{ η}$$

γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$.

$$\text{Από τη (2) έχουμε: } p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \varphi$$

$$\text{ή } (m_1 v_1)^2 = (m_1 v_1')^2 + (m_2 v_2')^2$$

$$+ 2m_1 v_1' m_2 v_2' \cos \varphi$$

$$\text{ή } m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 + 2m_1 m_2 v_1' v_2' \cos \varphi$$

και επειδή $m_1 = m_2$, προκύπτει τελικά:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1' v_2' \cos \varphi \quad (3).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Ισχύει: $K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή } v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $0 = 2v_1' v_2' \cos \varphi$ και επειδή $v_1' \neq 0$ και $v_2' \neq 0$, έχουμε τελικά: $\cos \varphi = 0$ ή $\varphi = 90^\circ$.

β. Από τη σχέση (4) βρίσκουμε: $v_1 = 5 \text{ m/s}$.

γ. Έχουμε: $\pi = \frac{K_{\text{I(μετά)}}}{K_{\text{I(πριν)}}} \cdot 100\%$

ή $\pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 36\%.$

δ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2',$$

οπότε: $|\Delta \vec{p}_2| = |\vec{p}_2'| \quad \text{ή} \quad |\Delta \vec{p}_2| = m_2 v_2'$

ή $|\Delta \vec{p}_2| = 8 \text{ kg m/s}.$

Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση,

έχουμε: $\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0}$

ή $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$, οπότε: $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$

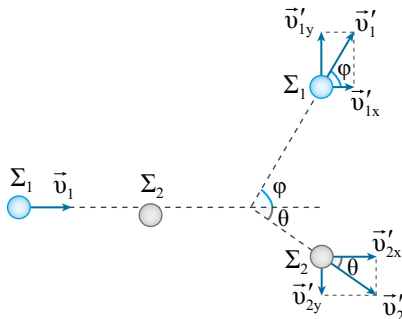
ή $|\Delta \vec{p}_1| = 8 \text{ kg m/s}.$

170. α. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

ή $m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \varphi + m_2 v_2' \sin \theta$

ή $20 = v_1' + \sqrt{3} v_2' \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}_{y'}$$

ή $0 = m_1 v_1' \sin \varphi - m_2 v_2' \sin \theta$

ή $v_1' \sin \varphi = v_2' \sin \theta \quad \text{ή} \quad v_2' = \sqrt{3} v_1' \quad (2).$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε: $v_1' = 5 \text{ m/s}$ και $v_2' = 5\sqrt{3} \text{ m/s}.$

β. Για τις κινητικές ενέργειες του συστήματος των δύο σφαιρών πριν και μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{ολ(πριν)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

ή $K_{\text{ολ(πριν)}} = 50 \text{ m (S.I.)}$

και $K_{\text{ολ(μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

ή $K_{\text{ολ(μετά)}} = 50 \text{ m (S.I.)}.$

Επειδή $K_{\text{ολ(πριν)}} = K_{\text{ολ(μετά)}}$, η κρούση είναι ελαστική.

171. α. $v_1 = 4 \text{ m/s}.$

β. $\varphi = 45^\circ.$

γ. $|\Delta p| = 1,2\sqrt{2} \text{ kg m/s}.$

δ. $\bar{F} = 60\sqrt{2} \text{ N}.$

172. α. $v_2 = 10 \text{ m/s}.$

β. $\theta = 60^\circ.$

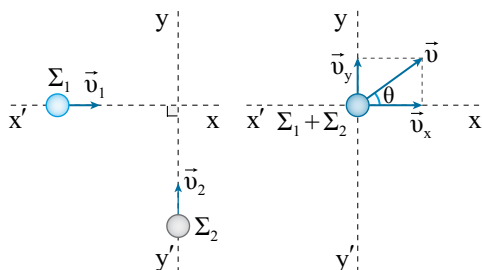
γ. $|\Delta p| = 1 \text{ kg m/s}.$

δ. $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$

173. α. Ελαστική.

β. $\bar{F} = 98 \text{ N}.$

174. α. Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.



Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}$ του συσσωματώματος στις συνιστώσες $\vec{v}_x$ και $\vec{v}_y$. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$.

$$\vec{p}_{ολ(πριν)x} = \vec{p}_{ολ(μετά)x} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_x$$

ή $v_x = 6 \text{ m/s}$.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y'$:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)y} = \vec{p}_{ολ(μετά)y} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_y$$

ή $v_y = 8 \text{ m/s}$.

Το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{ή} \quad v = 10 \text{ m/s}.$$

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ με τον άξονα $x'x$.

$$\text{Ισχύει: } \varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{4}{3}.$$

β. Έχουμε: $Q_K = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad Q_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\text{ή} \quad Q_K = 312 \text{ J}.$$

γ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης στον άξονα $x'x$ είναι:

$$\Delta \vec{p}_{1x} = \vec{p}_{1x(τελ)} - \vec{p}_{1x(αρχ)} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

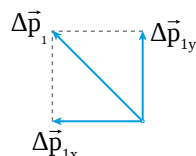
$$\Delta p_{1x} = m_1 v_x - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_{1x} = -24 \text{ kg m/s}.$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης στον άξονα $y'y'$ είναι:

$$\Delta \vec{p}_{1y} = \vec{p}_{1y(τελ)} - \vec{p}_{1y(αρχ)} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p_{1y} = m_1 v_y - 0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_{1y} = +16 \text{ kg m/s}.$$

Το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης προκύπτει:

$$|\Delta p_1| = \sqrt{(\Delta p_{1x})^2 + (\Delta p_{1y})^2}$$

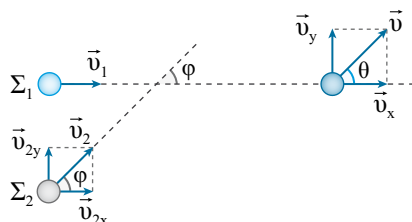
$$\text{ή} \quad |\Delta p_1| = \sqrt{832} = 28,8 \text{ kg m/s}.$$

$$\text{Άρα: } |\vec{F}_1| = \frac{|\Delta p_1|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad |\vec{F}_1| = 2.880 \text{ N}.$$

175. α. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $y'y'$ έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)y} = \vec{p}_{ολ(μετά)y} \quad \text{ή} \quad m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2) v_y$$

$$\text{ή} \quad m_2 v_2 \eta\mu\theta = (m_1 + m_2) v \eta\mu\theta \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$



β. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα x'x έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν) x} = \vec{p}_{ολ(μετά) x}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x$$

$$\text{ή } m_1 v_1 + m_2 v_2 \sin \varphi = (m_1 + m_2) v \sin \theta$$

$$\text{ή } v_1 = 6 \text{ m/s.}$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{100}{3} \%.$$

176. α. Το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_w + W_N$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m + M)v^2 = -\mu(m + M)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } v = 10 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ στον άξονα x'x κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν) x} = \vec{p}_{ολ(μετά) x} \quad \text{ή } m v_{0x} = (m + M) v$$

$$\text{ή } m v_0 \sin \varphi = (m + M) v \quad \text{ή } v_0 = 400 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος στον άξονα x'x εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_{βλ, x} = \vec{p}_{βλ, x(τελ)} - \vec{p}_{βλ, x(αρχ)}$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ, x} = mv - mv_0 \sin \varphi$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ, x} = -19 \text{ kg m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος στον άξονα y'y εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_{βλ, y} = \vec{p}_{βλ, y(τελ)} - \vec{p}_{βλ, y(αρχ)}$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ, y} = 0 - mv_0 \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ, y} = -20\sqrt{3} \text{ kg m/s.}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του βλήματος εξαιτίας της κρούσης προκύπτει:

$$\Delta p_{βλ} = \sqrt{(\Delta p_{βλ, x})^2 + (\Delta p_{βλ, y})^2}$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ} = \sqrt{1561} \text{ kg m/s}$$

$$\text{ή } \Delta p_{βλ} = 39,5 \text{ kg m/s.}$$

γ. Έχουμε: $Q_{ολ} = E_{ολ(αρχ)} - E_{ολ(τελ)}$

$$\text{ή } Q_{ολ} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ή } Q_{ολ} = 8.000 \text{ J.}$$

177. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ στον άξονα x'x κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν) x} = \vec{p}_{ολ(μετά) x}$$

$$\text{ή } m v_{0x} - M v_1 = (m + M) v$$

$$\text{ή } m v_0 \sin \varphi - M v_1 = (m + M) v$$

$$\text{ή } v = 6 \text{ m/s.}$$

β. Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{βλ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 99,2\%.$$

γ. Η ορμή του σώματος Σ μεταβάλλεται μόνο στον άξονα x'x. Έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_\Sigma = \Delta \vec{p}_{\Sigma,x} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_\Sigma = \vec{p}_{\Sigma,x(\text{τελ})} - \vec{p}_{\Sigma,x(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή } \Delta p_\Sigma = Mv + Mv_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_\Sigma = +8,8 \text{ kg m/s},$$

$$\text{οπότε: } |\Delta p_\Sigma| = 8,8 \text{ kg m/s}.$$

δ. Η ορμή του συστήματος σώμα Σ - βλήμα διατηρείται στον άξονα x'x και μεταβάλλεται στον άξονα y'y κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Η μεταβολή της ορμής του συστήματος σώμα Σ - βλήμα στον άξονα y'y κατά τη διάρκεια της κρούσης ισούται με τη μεταβολή της ορμής του βλήματος στον άξονα y'y:

$$\Delta \vec{p}_{ολ} = \Delta \vec{p}_{βλ,y} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_{βλ,y(\text{τελ})} - \vec{p}_{βλ,y(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή } \Delta p_{ολ} = 0 - mv_{0y}, \quad \text{οπότε: } |\Delta p_{ολ}| = mv_0 \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } |\Delta p_{ολ}| = 10\sqrt{3} \text{ kg m/s}.$$

ε. Το συνολικό διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα στο οριζόντιο δάπεδο μετά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_w + W_N$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m+M)v^2 = -\mu(m+M)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } s = 4,5 \text{ m}.$$

178. α. Έστω $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται έχουμε:

$$K_{2(\text{τελ})} - K_{2(\text{αρχ})} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } |v_2'| = 10 \text{ m/s.}$$

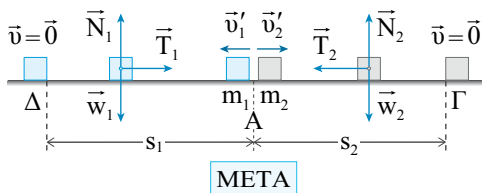
β. Για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $10 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} 20$

$$\text{ή } \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

γ. Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ ή } v_1' = -10 \text{ m/s.}$$

Συνεπώς, μετά την κρούση το σώμα Σ_1 κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, η μέγιστη απόσταση d μεταξύ των σωμάτων μετά την κρούση είναι $d = s_1 + s_2$.

Επομένως: $s_1 = d - s_2$ ή $s_1 = 25 \text{ m}$.

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση μεταξύ των θέσεων Α και Δ έχουμε:

$$K_{1(\text{τελ})} - K_{1(\text{αρχ})} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } \mu_1 = 0,2.$$

δ. Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα τη χρονική στιγμή t_1 εξαιτίας της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το δάπεδο είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = T_1 v \text{ (1) όπου } v \text{ μέτρο της ταχύτητας του σώματος } \Sigma_1 \text{ τη χρονική στιγμή } t_1.$$

$$\text{Από τη σχέση (1) έχουμε: } \frac{dQ}{dt} = \mu_1 m_1 g v$$

$$\text{ή } \frac{dQ}{dt} = \mu_1 m_1 g \left| \frac{p}{m_1} \right| \text{ ή } \frac{dQ}{dt} = 30 \text{ J/s.}$$

ε. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε: $\Sigma F_{1(x)} = m_1 \alpha_1$ ή $T_1 = m_1 \alpha_1$

$$\text{ή } \mu_1 m_1 g = m_1 \alpha_1 \text{ ή } \alpha_1 = \mu_1 g \text{ ή } \alpha_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Έστω t'_1 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Έχουμε: $v = |v'_1| - \alpha_1 t'_1$ ή $0 = |v'_1| - \alpha_1 t'_1$

$$\text{ή } t'_1 = \frac{|v'_1|}{\alpha_1} \text{ ή } t'_1 = 5 \text{ s.}$$

Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } \Sigma F_{2(x)} = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 \alpha_2$$

$$\text{ή} \quad \mu_2 m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = \mu_2 g$$

$$\text{ή} \quad \alpha_2 = 5 \text{ m/s}^2.$$

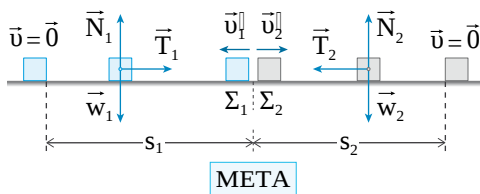
Έστω t'_2 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Έχουμε: $v = |v'_2| - \alpha_2 t'_2$ ή $0 = |v'_2| - \alpha_2 t'_2$

$$\text{ή} \quad t'_2 = \frac{|v'_2|}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad t'_2 = 2 \text{ s}.$$

Άρα η ζητούμενη χρονική διαφορά είναι:

$$\Delta t = t'_1 - t'_2 \quad \text{ή} \quad \Delta t = 3 \text{ s}.$$

179. α. Έστω $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά την κρούση.



Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}'_1$ του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται. Είναι:

$$K_{I(\text{τελ})} - K_{I(\text{αρχ})} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1} \quad \text{ή}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad |v'_1| = 4 \text{ m/s}.$$

β. Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το Σ_2 μετά την κρούση. Έχουμε: $\Sigma F_x = m_2 \alpha_2$ ή $T_2 = m_2 \alpha_2$ ή $\mu_2 m_2 g = m_2 \alpha_2$ ή $\alpha_2 = \mu_2 g$ (1).

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ στην οποία ακινητοποιείται ισχύουν:

$$v = |v'_2| - \alpha_2 t \quad \text{ή} \quad 0 = |v'_2| - \alpha_2 t$$

$$\text{ή} \quad |v'_2| = \alpha_2 t \quad (2) \quad \text{και} \quad s_2 = |v'_2| t - \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \quad (3).$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (3) έχουμε:

$$s_2 = \alpha_2 t^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \quad \text{ή} \quad s_2 = \frac{\alpha_2 t^2}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Από τη (2) προκύπτει ότι $|v'_2| = 4 \text{ m/s}$ και από την (1) ότι $\mu_2 = 0,2$.

γ. Για τις αλγεβρικές τιμές v'_1 και v'_2 των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση ισχύουν:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4),$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (5) και (4) προκύπτει: $\frac{v'_2}{v'_1} = \frac{2m_1}{m_1 - m_2}$ (6).

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Αν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, τότε $\frac{v'_2}{v'_1} = 1$ και από την (6) προκύπτει ότι $m_1 = -m_2$, που είναι άτοπο.

2η περίπτωση

Αν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, τότε $\frac{v'_2}{v'_1} = -1$, οπότε από την (6) προκύπτει:

$$m_2 = 3m_1 \quad \text{ή} \quad m_1 = 2 \text{ kg}.$$

δ. Έχουμε: $\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{I(\pi \text{riv})}} \cdot 100\%$

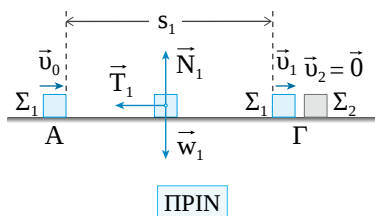
ή $\pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$ ή, λόγω της (5):

$$\pi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

ε. Έχουμε: $\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F_x|$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = T_1$

ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = \mu_1 m_1 g$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = 8 \text{ kg m/s}^2$.

180. α. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Είναι:



$$K_{I(\text{τελ.})} - K_{I(\text{αρχ.})} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

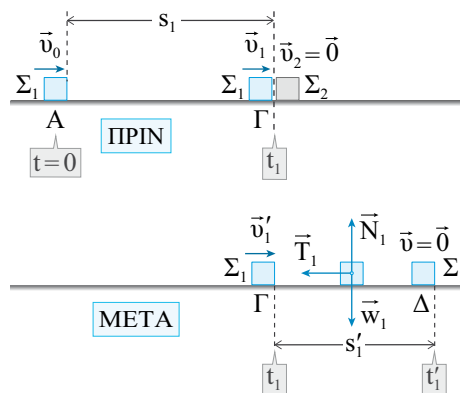
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad |v_1| = 10 \text{ m/s}.$$

β. Για την ελαστική κρούση των δύο σωμάτων έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v_1' = +6 \text{ m/s}$

και $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v_2' = +16 \text{ m/s}$.

γ. Έστω s_1' το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1' στην οποία ακινητοποιείται στη θέση Δ.



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Γ στη θέση Δ μετά την κρούση έχουμε: $K_{I(\Delta)} - K_{I(\Gamma)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1' + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad s_1' = \frac{v_1'^2}{2\mu_1 g} \quad \text{ή} \quad s_1' = 3,6 \text{ m}.$$

Άρα η απόσταση (ΑΔ) είναι: $(\text{ΑΔ}) = s_1 + s_1'$

$$\text{ή} \quad (\text{ΑΔ}) = 8 \text{ m}.$$

δ. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_1 πριν και μετά την κρούση. Έχουμε: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1$ ή $T_1 = m_1 \alpha_1$ ή $\mu_1 m_1 g = m_1 \alpha_1$ ή $\alpha_1 = \mu_1 g$ ή $\alpha_1 = 5 \text{ m/s}^2$.

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_1 συγκρούεται με το σώμα Σ_2 υπολογίζεται από την εξίσωση της ταχύτητας: $|v_1| = |v_0| - \alpha_1 t_1$

$$\text{ή} \quad t_1 = \frac{|v_0| - |v_1|}{\alpha_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,4 \text{ s}.$$

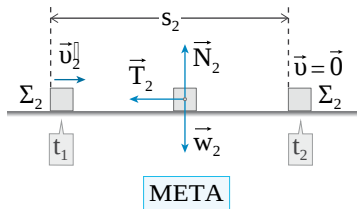
Η χρονική στιγμή t_1' στην οποία το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται μετά την κρούση υπολογίζε-

ται από την εξίσωση: $v = |v_1'| - \alpha_1 (t_1' - t_1)$

$$\text{ή } 0 = |v_1'| - \alpha_1 (t_1' - t_1) \quad \text{ή } t_1' - t_1 = \frac{|v_1'|}{\alpha_1}$$

$$\text{ή } t_1' = t_1 + \frac{|v_1'|}{\alpha_1} \quad \text{ή } t_1' = 1,6 \text{ s.}$$

ε. Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση και μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εμφανίζει με το οριζόντιο δάπεδο.



Έχουμε: $\Sigma F_x = m_2 \alpha_2$ ή $T_2 = m_2 \alpha_2$

$$\text{ή } \mu_2 m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή } \alpha_2 = \mu_2 g$$

$$\text{ή } \mu_2 = \frac{\alpha_2}{g} \quad (1).$$

Επειδή το σώμα Σ_2 μετά την κρούση εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, η χρονική εξίσωση του μέτρου $|v|$ της ταχύτητάς του μέχρι να ακινητοποιηθεί δίνεται από την εξίσωση:

$$|v| = |v_2'| - \alpha_2 (t - t_1) \quad (2).$$

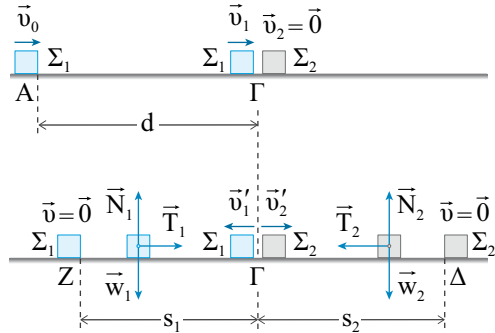
Αν στη (2) θέσουμε $|v| = 0$ και $t = t_2$, έχουμε:

$$0 = |v_2'| - \alpha_2 (t_2 - t_1) \quad \text{ή } \alpha_2 = \frac{|v_2'|}{t_2 - t_1}$$

$$\text{ή } \alpha_2 = 4 \text{ m/s}^2.$$

Από την (1) βρίσκουμε τελικά $\mu_2 = 0,4$.

181. α. Έστω $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά την κρούση.



Από την εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Γ στη θέση Ζ μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{1(Z)} - K_{1(\Gamma)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } |v_1'| = 2 \text{ m/s.}$$

β. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Γ στη θέση Δ μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{2(\Delta)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή } |v_2'| = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v_1' και v_2' των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1),$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad \frac{-|v'_1|}{|v'_2|} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$\text{ή} \quad -\frac{1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \quad (3).$$

δ. Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη (2) προκύπτει: $v_1 = 6 \text{ m/s}$.

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Γ πριν από την κρούση έχουμε:

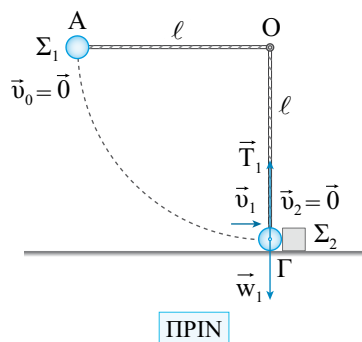
$$K_{1(\Gamma)} - K_{1(A)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g d + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2\mu g d} \quad \text{ή} \quad v_0 = 10 \text{ m/s}.$$

ε. Έχουμε: $\pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 32\%.$

182. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ της κίνησής του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad 0 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{2g\ell} \quad \text{ή} \quad v_1 = 5 \text{ m/s}.$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_k$

$$\text{ή} \quad T_1 - m_1 g = \frac{m_1 v_1^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T_1 = m_1 g + \frac{m_1 v_1^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T_1 = 30 \text{ N}.$$

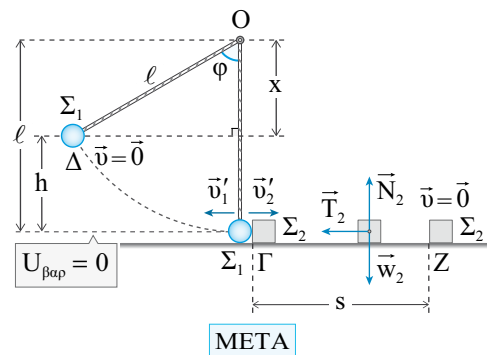
β. Έστω h το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση. Ισχύει:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή} \quad \cos\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \text{ή} \quad h = \ell(1 - \cos\varphi)$$

$$\text{ή} \quad h = 0,45 \text{ m}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Δ της κίνησης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g h \quad \text{ή} \quad |v_1'| = 3 \text{ m/s}.$$



γ. Έχουμε: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή} \quad -|v'_1| = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 4 \text{ kg}.$$

δ. Έχουμε: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = 2 \text{ m/s}.$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Z , όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

$$K_{2(Z)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = W_{T_2} + 0 + 0 \quad \text{ή } W_{T_2} = -8 \text{ J.}$$

$$\text{Άρα: } Q_{T_2} = |W_{T_2}| \quad \text{ή } Q_{T_2} = 8 \text{ J.}$$

ε. Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } \Sigma F_x = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή } T_2 = m_2 \alpha_2$$

$$\text{ή } \mu m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad \text{ή } \alpha_2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Έστω $t_0 = 0$ η χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση και t η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } 0 = v_2' - \alpha_2 t \quad \text{ή } t = \frac{v_2'}{\alpha_2} \quad \text{ή } t = 2 \text{ s.}$$

Το μέτρο v' της ταχύτητας του σώματος Σ_2 1 s πριν ακινητοποιηθεί υπολογίζεται από την εξίσωση (στο S.I.): $v' = v_2' - \alpha_2 (t - 1)$

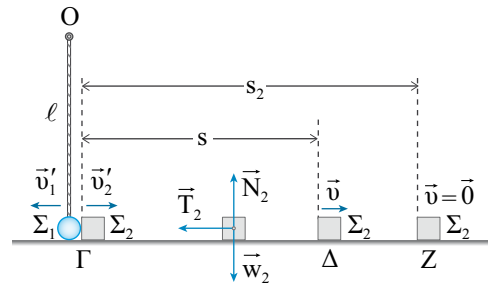
$$\text{ή } v' = 1 \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το δάπεδο 1 s πριν ακινητοποιηθεί είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = T_2 v' \quad \text{ή } \frac{dQ}{dt} = \mu m_2 g v'$$

$$\text{ή } \frac{dQ}{dt} = 4 \text{ J/s.}$$

183. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2' της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Δ , όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



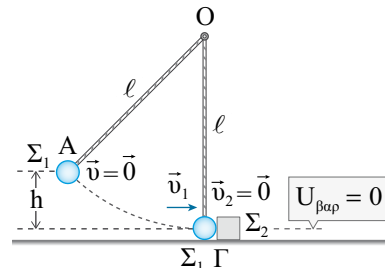
META

$$K_{2(\Delta)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_2' = 3 \text{ m/s.}$$

$$\text{β. Έχουμε: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1 = 6 \text{ m/s.}$$



ΠΡΙΝ

Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ της κίνησης του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή } m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } h = 1,8 \text{ m.}$$

γ. Έστω v_1' η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1' = -3 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = |\Sigma \vec{F}| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = F_k$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \frac{m_1 v_1'^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = 4,5 \text{ kg m/s}^2.$$

δ. Από το Θ.Μ.Κ.Ε για τις θέσεις Γ και Ζ της κίνησης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $K_{2(Z)} - K_{2(\Gamma)} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad s_2 = 1,125 \text{ m}.$$

ε. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από

$$\text{τον τύπο: } \pi = \frac{|W_{T_2}^{r \rightarrow z}|}{m_1 g h} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\mu m_2 g s_2}{m_1 g h} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

184. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο ανώτερο σημείο Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στο σημείο αυτό είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στη θέση Γ δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\text{Επομένως, ισχύει: } \Sigma F = F_k \quad \text{ή} \quad T + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$

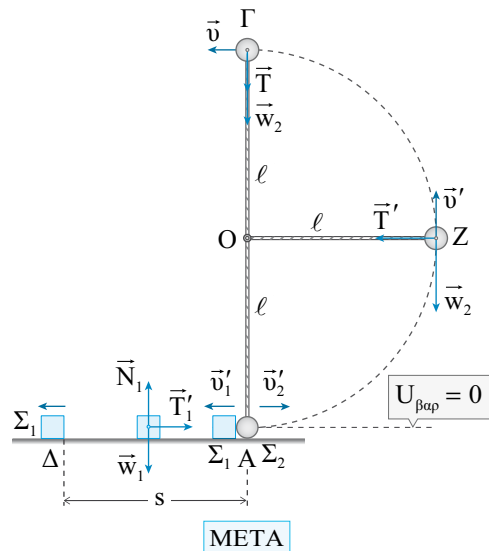
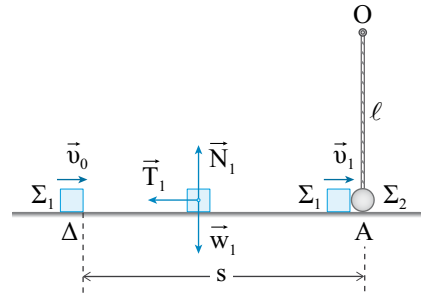
Για να εκτελέσει το σώμα Σ_2 ανακύκλωση, πρέπει να φτάσει στη θέση Γ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$ ή λόγω

$$\text{της (1): } \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_2 v^2}{\ell} \geq m_2 g$$

$$\text{ή} \quad v \geq \sqrt{g\ell} \quad (2).$$

Από τη (2) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στη θέση Γ στην περίπτωση που μόλις εκτελεί ανακύκλωση είναι:

$$v = \sqrt{g\ell} \quad (3).$$



Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2' της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Α. Είναι:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad K_{2(A)} + U_{2(A)} = K_{2(\Gamma)} + U_{2(\Gamma)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g 2\ell \quad \text{ή} \quad \text{λόγω της}$$

$$(3): \frac{1}{2} v_2'^2 = \frac{1}{2} g\ell + 2g\ell \quad \text{ή} \quad v_2' = \sqrt{5g\ell}$$

$$\text{ή} \quad v_2' = 6 \text{ m/s}.$$

β. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης του Σ_1 μετά την κρούση. Έχουμε: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1$

$$\text{ή} \quad T_1 = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή} \quad \mu m_1 g = m_1 \alpha_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = \mu g$$

$$\text{ή} \quad \alpha_1 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Για την κίνηση του σώματος Σ_1 στο χρονικό διάστημα Δt από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από την αρχική του θέση

$$\Delta \text{ ισχύει: } s = |v_1'| \Delta t - \frac{1}{2} \alpha_1 (\Delta t)^2$$

$$\text{ή} \quad |v_1'| = \frac{s + \frac{1}{2} \alpha_1 (\Delta t)^2}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad |v_1'| = 6 \text{ m/s}.$$

γ. Για τις αλγεβρικές τιμές v_1' και v_2' των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύ-

$$\text{πτει: } \frac{v_1'}{v_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad -1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad (3).$$

δ. Για να υπολογίσουμε το μέτρο $\bar{v}'$ της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε για την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Ζ (βλ. προηγούμενο σχήμα):

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(Z)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g\ell + \frac{1}{2} m_2 v'^2$$

$$\text{ή} \quad v' = \sqrt{21,6} \text{ m/s}.$$

Έστω T' το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από τη θέση Ζ όπου το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο μετά την κρούση. Έχουμε: $T' = F_k$ ή $T' = \frac{m_2 v'^2}{\ell}$

$$\text{ή} \quad T' = 90 \text{ N}.$$

ε. Από τη σχέση (2), λόγω της σχέσης (3) προκύπτει: $v_1 = 12 \text{ m/s}$. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Δ στη θέση Α πριν από την κρούση έχουμε:

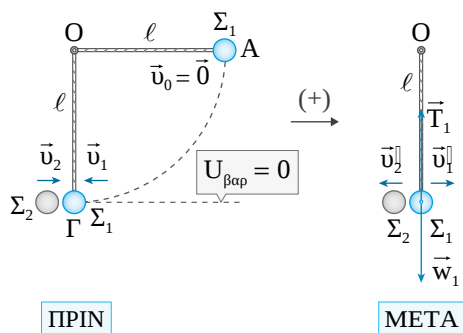
$$K_{I(A)} - K_{I(\Delta)} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_0 = \sqrt{180} \text{ m/s}.$$

$$\text{Είναι: } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 20\%.$$

185. α. Έστω v_1' και v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.



Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, κατά τη διάρκεια της κρούσης ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως: $v'_1 = v_2$ ή $v'_1 = -5 \text{ m/s}$ ή $|v'_1| = 5 \text{ m/s}$.

β. Για το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση

$$\text{έχουμε: } \Sigma F_{\text{ακτ}} = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T_1 - w_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad 6w_1 - w_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad 5m_1 g = \frac{m_1 v_1'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad \ell = \frac{v_1'^2}{5g} \quad \text{ή} \quad \ell = 0,5 \text{ m.}$$

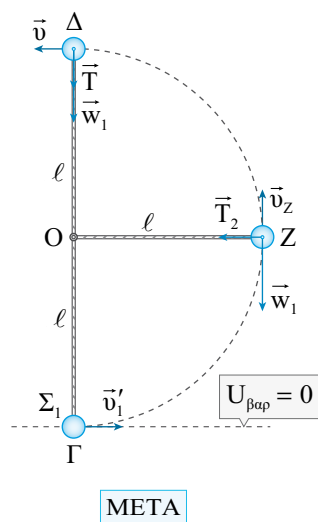
γ. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής κίνησης του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή} \quad m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή} \quad |v_1| = \sqrt{10} \text{ m/s.}$$

Επειδή τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, έχουμε: $v'_2 = v_1$ ή $v'_2 = +\sqrt{10} \text{ m/s}$

$$\text{ή} \quad |v'_2| = \sqrt{10} \text{ m/s.}$$

δ. Για να εκτελέσει το σώμα Σ_1 ανακύκλωση μετά την κρούση, πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση με το νήμα τεντωμένο.



Συνεπώς, στο σημείο Δ πρέπει να ισχύει $T \geq 0$. Έστω ότι το σώμα Σ_1 φτάνει στο σημείο Δ με ταχύτητα μέτρου v .

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας v , εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_1 μετά την κρούση:

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\Delta} + U_{\Delta}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g 2\ell$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{5} \text{ m/s.}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στη θέση Δ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_{\kappa}$ ή $T + m_1 g = \frac{m_1 v^2}{\ell}$

$$\text{ή} \quad T = \frac{m_1 v^2}{\ell} - m_1 g \quad \text{ή} \quad T = 0.$$

Άρα το σώμα Σ_1 μετά την κρούση εκτελεί οριακά ανακύκλωση.

ε. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_z της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή μετά την κρούση στην οποία το νήμα γίνεται

για πρώτη φορά οριζόντιο, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του από τη θέση Γ στη θέση Ζ, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(Z)} \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_Z + U_Z$$

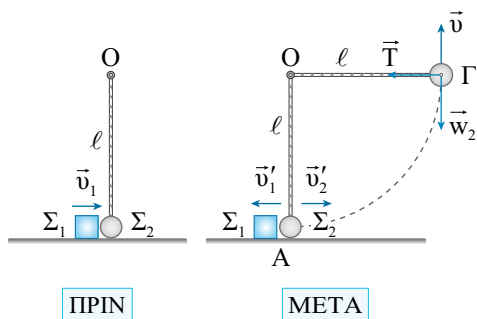
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = m_1 g \ell + \frac{1}{2} m_1 v_Z^2$$

$$\text{ή} \quad v_Z = \sqrt{15} \text{ m/s.}$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 στη θέση Ζ είναι:

$$\frac{dK}{dt} = -m_1 g v_Z \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -30\sqrt{15} \text{ J/s.}$$

186. α. Έστω v_1' και v_2' τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.



Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από τη θέση Γ όπου το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο μετά την κρούση.

$$\text{Στη θέση Γ ισχύει: } T = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T = \frac{m_2 v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad v = 3 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων Α και Γ για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g \ell + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$\text{ή} \quad |v_2'| = 5 \text{ m/s.}$$

β. Επειδή το σώμα Σ_1 μετά την κρούση σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα στο οριζόντιο δάπεδο, η κίνηση που εκτελεί είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Συνεπώς, για το μέτρο $|v_1'|$ της ταχύτητάς του αμέσως μετά την κρούση ισχύει: $|v_1'| = \frac{s}{\Delta t}$

$$\text{ή} \quad |v_1'| = 10 \text{ m/s.}$$

γ. Για τις αλγεβρικές τιμές v_1' και v_2' των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση δίνονται από τους

$$\text{τύπους: } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1),$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad -2 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad m_1 = \frac{m_2}{5}$$

$$\text{ή} \quad m_1 = 0,4 \text{ kg.}$$

δ. Από τη σχέση (2) βρίσκουμε: $v_1 = 15 \text{ m/s.}$

$$\text{Έχουμε: } \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{τελ})} - \vec{p}_{1(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -10 \text{ kg m/s}$$

$$\text{οπότε: } |\Delta p_1| = 10 \text{ kg m/s.}$$

187. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\text{τελ})} \quad \text{ή} \quad m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή} \quad |v_1| = \sqrt{2gh_1} \quad \text{ή} \quad |v_1| = 3 \text{ m/s.}$$

β. Επειδή η σφαίρα Σ_2 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση μετά την κρούση (βλ. λυμένη άσκηση-

ση 5α), έχουμε: $|v'_2| = \sqrt{5g\ell_2}$ ή $|v'_2| = 5 \text{ m/s}$.

γ. Αν θεωρήσουμε θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, τότε από την εξίσωση που δίνει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή } +5 \text{ m/s} = \frac{4}{3}(+3 \text{ m/s}) - \frac{1}{3} v_2 \text{ ή } v_2 = -3 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \text{ ή } m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{ή } h_2 = 0,45 \text{ m}.$$

δ. Για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τον τύπο:

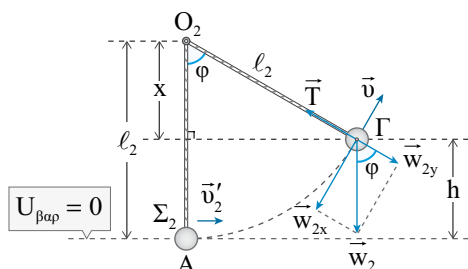
$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ ή } v'_1 = -1 \text{ m/s}.$$

Συνεπώς, έχουμε: $\vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\tau\epsilon\lambda)} - \vec{p}_{1(\alpha\rho\chi)}$

$$\text{ή } \Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \text{ ή } \Delta p_1 = -8 \text{ kg m/s}$$

οπότε: $|\Delta p_1| = 8 \text{ kg m/s}$.

ε. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή, μετά την κρούση, στην οποία διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση Γ όπου το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο Σ_2 από το νήμα είναι $T = 45 \text{ N}$.



Για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στην ακτινική διεύθυνση, όταν διέρχεται από το σημείο Γ ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa} \text{ ή } T - w_{2y} = \frac{m_2 v^2}{\ell_2}$$

$$\text{ή } T = m_2 g \sin \varphi + \frac{m_2 v^2}{\ell_2} \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Α στη θέση Γ έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g h$$

$$\text{ή } v^2 = v_2'^2 - 2gh \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε: $\sin \varphi = \frac{x}{\ell_2}$

$$\text{ή } \sin \varphi = \frac{\ell_2 - h}{\ell_2} \text{ ή } h = \ell_2 (1 - \sin \varphi) \quad (3).$$

Με αντικατάσταση της (3) στη (2) προκύπτει:

$$v^2 = v_2'^2 - 2g\ell_2 (1 - \sin \varphi) \quad (4).$$

Με αντικατάσταση της (4) στη σχέση (1) έχουμε:

$$T = m_2 g \sin \varphi + \frac{m_2}{\ell_2} [v_2'^2 - 2g\ell_2 (1 - \sin \varphi)]$$

$$\text{ή } T = m_2 g \sin \varphi + \frac{m_2}{\ell_2} v_2'^2 - 2m_2 g (1 - \sin \varphi).$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$\text{βρίσκουμε: } \sin \varphi = \frac{1}{2} \text{ ή } \varphi = 60^\circ.$$

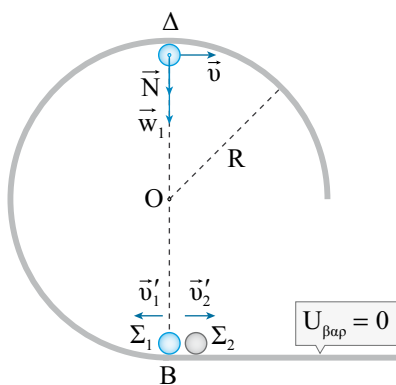
188. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Β της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο Β του κυκλικού οδηγού, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(B)} \text{ ή } K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gR} \quad \text{ή } v_1 = 7 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\vec{v}_1'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση και $\vec{v}$ η ταχύτητά του, όταν διέρχεται από το ανώτερο σημείο Δ του κυκλικού οδηγού.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στο σημείο Δ της τροχιάς του είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η ακτινική δύναμη $\vec{N}$ από τον κυκλικό οδηγό. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων δρα ως κεντρομόλος δύναμη στο σημείο Δ.

$$\text{Επομένως: } \Sigma F_{\text{ακτ}} = F_{\kappa} \quad \text{ή } N + w_1 = \frac{m_1 v^2}{R}$$

$$\text{ή } N = \frac{m_1 v^2}{R} - m_1 g \quad (1).$$

Επειδή το σώμα Σ_1 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση στη θέση Δ, ισχύει: $N = 0$.

$$\text{Επομένως, από την (1) έχουμε: } \frac{m_1 v^2}{R} - m_1 g = 0$$

$$\text{ή } v = \sqrt{gR} \quad \text{ή } v = \sqrt{20} \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Β και Δ έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(B)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$ ή $K_B + U_B = K_{\Delta} + U_{\Delta}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g 2R$$

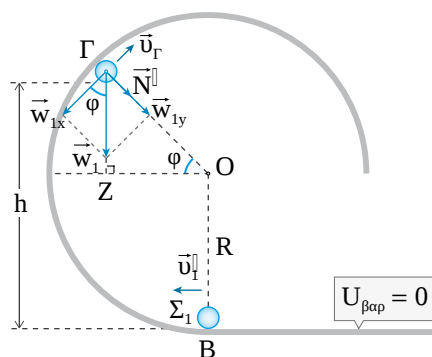
$$\text{ή } v_1' = \sqrt{v^2 + 4gR} \quad \text{ή } |v_1'| = 10 \text{ m/s.}$$

γ. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Συνεπώς, ισχύουν: $v_2' = v_1$
ή $v_2' = 7 \text{ m/s}$ και $v_1' = v_2$ ή $v_2 = 10 \text{ m/s}$.

Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{2(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = -51\%.$$



δ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στη θέση Γ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η ακτινική δύναμη $\vec{N}'$ από τον κυκλικό οδηγό. Έστω v_r το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 στο σημείο Γ. Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Β και Γ έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(B)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή } K_B + U_B = K_{\Gamma} + U_{\Gamma}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_r^2 + m_1 gh$$

$$\text{ή } v_r = \sqrt{v_1'^2 - 2gh} \quad \text{ή } v_r = \sqrt{40} \text{ m/s.}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε:

$$\eta\mu\phi = \frac{(ΖΓ)}{(ΟΓ)} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{h-R}{R} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{1}{2}.$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στο σημείο Γ, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

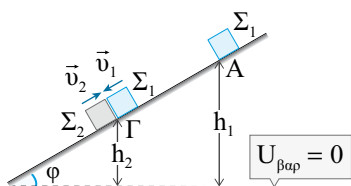
$$\text{Επομένως: } \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad N' + w_{1y} = \frac{m_1 v_{\Gamma}^2}{R}$$

$$\text{ή} \quad N' = \frac{m_1 v_{\Gamma}^2}{R} - m_1 g \eta\mu\phi \quad \text{ή} \quad N' = 30 \text{ N}.$$

189. α. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Γ πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που ταυτίζεται με τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Είναι:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g h_2$$

$$\text{ή} \quad |v_1| = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad \text{ή} \quad |v_1| = 4 \text{ m/s}.$$



β. Για την ελαστική κρούση των Σ_1 και Σ_2 :

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v_1' = -8 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{ή} \quad v_2' = 0.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{|E_{\mu\eta\chi(\text{μετά})} - E_{\mu\eta\chi(\text{πριν})}|}{E_{\mu\eta\chi(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{όπου } E_{\mu\eta\chi(\text{μετά})}^{\Sigma_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + m_2 g h_2 \quad \text{και}$$

$$E_{\mu\eta\chi(\text{πριν})}^{\Sigma_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g h_2.$$

Επομένως, προκύπτει: $\pi = 80\%$.

δ. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα με την οποία το σώμα Σ_2 φτάνει στο σημείο Δ που βρίσκεται στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Από την Α.Δ.Μ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Γ στη θέση Δ μετά την κρούση έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$\text{ή} \quad |v| = 2 \text{ m/s}.$$

ε. Έστω a_2 το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_2 στο κεκλιμένο επίπεδο μετά την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } \Sigma F_x = m_2 a_2 \quad \text{ή} \quad m_2 g \eta\mu\phi = m_2 a_2$$

$$\text{ή} \quad a_2 = g \eta\mu\phi \quad \text{ή} \quad a_2 = 5 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2 φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από την εξίσωση: $|v| = |v_2'| + a_2 t_1$

$$\text{ή} \quad t_1 = \frac{|v| - |v_2'|}{a_2} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,4 \text{ s}.$$

Το διάστημα s_2 που διανύει το σώμα Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_1^2$ ή $s_2 = 0,4 \text{ m}$.

Το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση αρχίζει να κινείται προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου επιβραδυνόμενο.

Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 μετά την κρούση στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία.

Έχουμε: $\Sigma F_x = m_1 a_1$ ή $m_1 g \eta \mu \phi = m_1 a_1$
ή $a_1 = g \eta \mu \phi$ ή $a_1 = 5 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Ισχύει: $v = |v'_1| - a_1 t_2$

$$\text{ή } 0 = |v'_1| - a_1 t_2 \quad \text{ή } t_2 = \frac{|v'_1|}{a_1} \quad \text{ή } t_2 = 1,6 \text{ s.}$$

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ στην οποία το σώμα Σ_2 φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, το σώμα Σ_1 δεν έχει ακόμη ακινητοποιηθεί στιγμιαία.

Το διάστημα s_1 που διανύει το Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$s_1 = |v'_1| t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \text{ή } s_1 = 2,8 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = s_1 + s_2$ ή $d = 3,2 \text{ m}$.

190. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση με το σώμα Σ_2 .

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 στο οριζόντιο δάπεδο πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_B^2 = -\mu m_1 g d + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g d} \quad \text{ή } v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v'_1 = 0$$

$$\text{και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v'_2 = 2 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\Delta \ell_{\text{max}}$ η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} + W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2} \quad \text{ή}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = U_{\text{ελ(αρχ)}} - U_{\text{ελ(τελ)}} - T_2 \Delta \ell_{\text{max}} + 0 + 0$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\text{max}})^2 - \mu m_2 g \Delta \ell_{\text{max}}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\text{max}})^2 + \mu m_2 g \Delta \ell_{\text{max}} - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0$$

$$\text{ή } 75k (\Delta \ell_{\text{max}})^2 + 5\Delta \ell_{\text{max}} - 2 = 0 \text{ (S.I.).}$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\Delta \ell_{\text{max}} = \frac{2}{15} \text{ m, } \Delta \ell_{\text{max}} = -0,2 \text{ m.}$$

$$\text{Δεκτή λύση είναι η } \Delta \ell_{\text{max}} = \frac{2}{15} \text{ m.}$$

γ. Τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση, ασκείται στο σώμα Σ_2 η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\text{ελ}}$ και η δύναμη της στατικής τριβής από το δάπεδο.

$$\text{Έχουμε: } F_{\text{ελ}} = k \Delta \ell_{\text{max}} \quad \text{ή } F_{\text{ελ}} = 20 \text{ N.}$$

Η οριακή στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_2 είναι: $T_{\text{στ(ορ)}} = \mu_s N_2$ ή $T_{\text{στ(ορ)}} = \mu_s m_2 g$
ή $T_{\text{στ(ορ)}} = 5 \text{ N.}$

Επειδή είναι $F_{\text{ελ}} > T_{\text{στ(ορ)}}$, το σώμα Σ_2 θα αρχίσει να κινείται ξανά.

Έστω ότι το σώμα Σ_2 επιστρέφει στο σημείο όπου έγινε η κρούση με ταχύτητα μέτρου v .

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιήθηκε στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται ξανά από το σημείο όπου έγινε η κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} + W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 - 0 = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\text{max}})^2 - \mu m_2 g \Delta \ell_{\text{max}} + 0 + 0$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k}{m_2} (\Delta \ell_{\text{max}})^2 - 2\mu g \Delta \ell_{\text{max}}}$$

$$\text{ή } v = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m/s.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 διέρχεται από το σημείο όπου έγινε η πρώτη κρούση (στο οποίο βρίσκεται ακίνητο το σώμα Σ_1) με ταχύτητα μέτρου $v \neq 0$, θα συμβεί και δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων.

Έστω v_1'' και v_2'' τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα μετά τη δεύτερη κρούση τους. Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες και η δεύτερη κρούση είναι επίσης κεντρική και ελαστική, ισχύει: $v_1'' = v$

$$\text{ή } v_1'' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m/s και } v_2'' = 0.$$

δ. Έστω Q_T η θερμότητα που εκλύεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της κίνησής του στο τεταρτοκύκλιο πριν συγκρουστεί για πρώτη φορά με το σώμα Σ_2 . Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Β, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Β, έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(B)} + Q_T \quad \text{ή } Q_T = E_{\text{μηχ}(A)} - E_{\text{μηχ}(B)}$$

$$\text{ή } Q_T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + m_1 g R - \frac{1}{2} m_1 v_B^2$$

$$\text{ή } Q_T = 12 \text{ J.}$$

191. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = 6 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = 4 \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 12\%.$$

γ. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $\Sigma F_x = m_1 \alpha_1$ ή $T_1 = m_1 \alpha_1$ ή $\mu_1 m_1 g = m_1 \alpha_1$ ή $\alpha_1 = \mu_1 g$ ή $\alpha_1 = 2 \text{ m/s}^2$.

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από την εξίσωση: $v_1 = v_0 - \alpha_1 t_1$ ή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Συνεπώς, το χρονικό διάστημα Δt κίνησης του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή

t_1 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται είναι:
 $\Delta t = t_2 - t_1$ ή $\Delta t = 2 \text{ s}$.

Το μέτρο a_2 της επιβράδυνσης του συσσωματώματος κατά την ολίσθησή του στο οριζόντιο δάπεδο υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$0 = v - a_2 \Delta t \quad \text{ή} \quad a_2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Αν μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του συσσωματώματος και του οριζόντιου δαπέδου, από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση έχουμε:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a_2 \quad \text{ή} \quad T = (m_1 + m_2)a_2$$

$$\text{ή} \quad \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_2 \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{a_2}{g}$$

$$\text{ή} \quad \mu = 0,2.$$

δ. Έστω s_2 το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα στο οριζόντιο δάπεδο στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$. Έχουμε:

$$s_2 = v\Delta t - \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad s_2 = 4 \text{ m}.$$

$$\text{Επομένως: } \frac{Q_1}{Q_\Sigma} = \frac{|W_{T_1}|}{|W_T|}$$

$$\text{ή} \quad \frac{Q_1}{Q_\Sigma} = \frac{\mu_1 m_1 g s_1}{\mu(m_1 + m_2)g s_2} \quad \text{ή} \quad \frac{Q_1}{Q_\Sigma} = \frac{8}{3}.$$

192. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{N_1} + W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 8 \text{ m/s}.$$

β. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την

κρούση, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση όπου έγινε η κρούση μέχρι τη θέση Α. Έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -Ts_1 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \mu_2(m_1 + m_2)g s_1$$

$$\text{ή} \quad v = 6 \text{ m/s}.$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2)v \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$

δ. Έχουμε: $\frac{dK}{dt} = -T v'$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -\mu_2(m_1 + m_2)g \frac{p}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -\mu_2 g p \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -18 \text{ J/s}.$$

193. α. Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση προκύπτει από

$$\text{τη σχέση: } \pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\%.$$

Αξιοποιώντας τη μεθοδολογία Γ1 βρίσκουμε:

$$\pi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 100\% \quad \text{από την οποία προκύ-$$

$$\text{πτει: } m_1 = 1 \text{ kg}.$$

β. Το συνολικό ποσό θερμότητας που εκλύεται από τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το συσσωμάτωμα είναι:

$$Q_{ολ} = E_{αρχ} - E_{τελ} \quad \text{ή} \quad Q_{ολ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2Q_{ολ}}{m_1}} \quad \text{ή} \quad v_1 = 20 \text{ m/s.}$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad v = 4 \text{ m/s.}$$

Το συνολικό διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = -\mu (m_1 + m_2) g s + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad s = 4 \text{ m.}$$

δ. Το μέτρο a της επιβράδυνσης του συσσωματώματος. Είναι:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2) a \quad \text{ή} \quad T = (m_1 + m_2) a$$

$$\text{ή} \quad \mu (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a \quad \text{ή} \quad a = 2 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία ακινητοποιείται το συσσωμάτωμα υπολογίζεται από την εξίσωση: $0 = v - at_1$ ή $t_1 = \frac{v}{a}$ ή $t_1 = 2 \text{ s.}$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 - 1 \text{ s}$ το μέτρο v' της ταχύτητας του συσσωματώματος υπολογίζεται από την εξίσωση: $v' = v - at_2$

$$\text{ή} \quad v' = 2 \text{ m/s.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός προκύπτει:

$$\frac{dQ}{dt} = T v' \quad \text{ή} \quad \frac{dQ}{dt} = \mu (m_1 + m_2) g v'$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ}{dt} = 20 \text{ J/s.}$$

194. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του κύβου τη χρονική στιγμή στην οποία εξέρχεται το βλήμα από αυτόν.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα βλήμα - κύβος κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad m v_1 = M v + m v_2 \quad \text{ή} \quad v = 10 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $E_{απ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad E_{απ} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \left(\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \right)$$

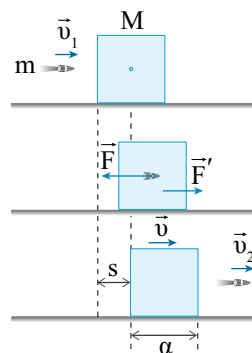
$$\text{ή} \quad E_{απ} = 5.850 \text{ J.}$$

γ. Έστω F το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο βλήμα στη χρονική διάρκεια Δt της κίνησής του, από τη χρονική στιγμή στην οποία προσκρούει στον κύβο μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία εξέρχεται από αυτόν.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του βλήματος στο χρονικό διάστημα Δt έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -F(s + \alpha) \quad (1).$$



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κύβου στο χρονικό διάστημα Δt έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} M v^2 + 0 = F's$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} M v^2 = F s \quad (2).$$

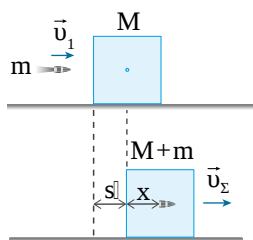
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2)

$$\text{έχουμε:} \quad \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -F \alpha$$

$$\text{ή} \quad F = 14.625 \text{ N}.$$

δ. Από τη σχέση (2) βρίσκουμε: $s = 0,015 \text{ m}$.

ε. Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. έχουμε:

$$m v_1 = (m + M) v_\Sigma \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 18 \text{ m/s}.$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του βλήματος από τη χρονική στιγμή στην οποία το βλήμα προσκρούει στον κύβο μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται σε σχέση με τον κύβο έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_\Sigma^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -F(s' + x) \quad (3).$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κύβου έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F$

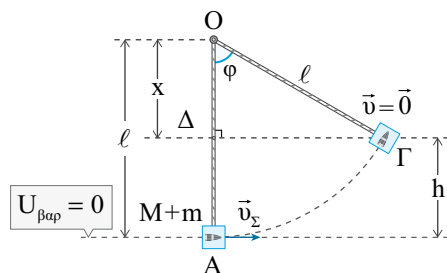
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} M v_\Sigma^2 = F s' \quad (4).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4)

$$\text{έχουμε:} \quad \frac{1}{2} (M + m) v_\Sigma^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -F x$$

από την οποία προκύπτει: $x = 0,5 \text{ m}$.

195. α. Έστω $\vec{v}_\Sigma$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση Γ η οποία βρίσκεται σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Α όπου έγινε η κρούση, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε:

$$\text{συν} \varphi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή} \quad \text{συν} \varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \text{ή} \quad h = \ell (1 - \text{συν} \varphi)$$

$$\text{ή} \quad h = 1,8 \text{ m}.$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_Σ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Α όπου έγινε η κρούση. Έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (M + m) v_\Sigma^2 + 0 = 0 + (M + m) g h$$

$$\text{ή} \quad v_\Sigma = 6 \text{ m/s}.$$

β. Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι:

$$\pi = \frac{M}{M+m} \cdot 100\% \quad (\text{βλ. μεθοδολογία Γ1}).$$

Από την εξίσωση αυτήν προκύπτει ότι $m = 0,2 \text{ kg}$.

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}_\Sigma$$

ή $v_0 = 150 \text{ m/s}$. Είναι: $E_{\text{απ}} = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

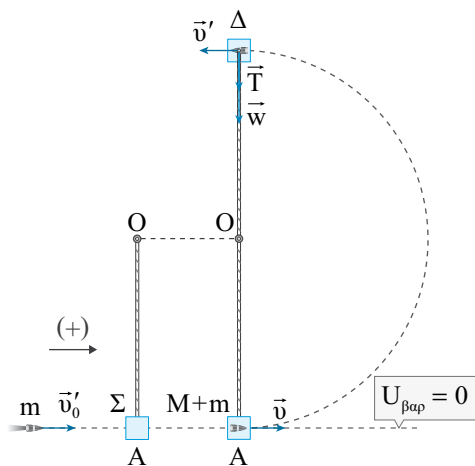
$$\text{ή} \quad E_{\text{απ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{απ}} = 2.160 \text{ J}.$$

δ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και v' το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στο σημείο Δ δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\text{Επομένως: } \Sigma F = F_k \quad \text{ή} \quad T + w = \frac{(M+m)v'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{(M+m)v'^2}{\ell} - (M+m)g \quad (1).$$



Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα ανακύκλωση, πρέπει να φτάσει στη θέση Δ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, στη θέση αυτή πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$ ή, λόγω της (1):

$$\frac{(M+m)v'^2}{\ell} - (M+m)g \geq 0 \quad \text{ή} \quad v' \geq \sqrt{g\ell}$$

$$\text{οπότε: } v'_{\min} = \sqrt{g\ell} \quad \text{ή} \quad v'_{\min} = 6 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Δ της κυκλικής κίνησης του συσσωματώματος μετά την κρούση έχουμε: $E_{\text{μηχ}(\text{αρχ})} = E_{\text{μηχ}(\text{τελ})}$ ή

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{1}{2}(M+m)v'^2_{\min} + (M+m)g2\ell$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{180} \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = 13,41 \text{ m/s}.$$

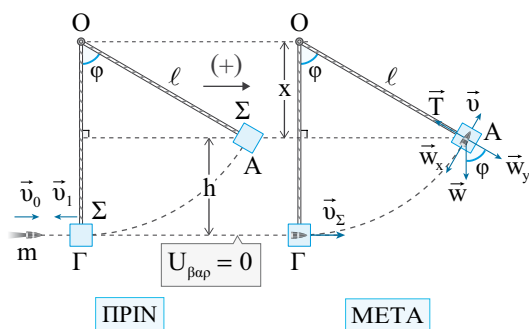
Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m\vec{v}'_0 = (M+m)\vec{v}$$

$$\text{ή} \quad v'_0 = 335,25 \text{ m/s}.$$

196. α. Για το ύψος h έχουμε: $\text{συν}\varphi = \frac{x}{\ell}$

$$\text{ή} \quad \text{συν}\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \text{ή} \quad h = \ell(1 - \text{συν}\varphi).$$



Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ₁ από τη θέση Α στη θέση Γ.

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad 0 + Mgh = \frac{1}{2} Mv_1^2 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \sin\varphi)} \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

β. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_Σ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε για τις θέσεις Γ και Α της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (M + m)v_\Sigma^2 = \frac{1}{2} (M + m)v^2 + (M + m)gh$$

$$\text{ή} \quad v_\Sigma = \sqrt{v^2 + 2g\ell(1 - \sin\varphi)} \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 5 \text{ m/s.}$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα βλήμα-σώμα Σ κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad mv_0 - Mv_1 = (M + m)v_\Sigma$$

$$\text{ή} \quad m = \frac{M(v_\Sigma + v_1)}{v_0 - v_\Sigma} \quad \text{ή} \quad m = 0,1 \text{ kg.}$$

δ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από τη θέση Α είναι η τάση $\vec{T}$ του νήματος και το βάρος του $\vec{w}$. Για τον ζητούμενο ρυθμό έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\vec{w} \cdot d\vec{s}}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -(M + m)g\eta\mu\varphi$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -37,5\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

197. α. Υπολογίζουμε το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για

την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση όπου αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί κυκλικά μέχρι τη θέση ακριβώς πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_2 . Έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 10 \text{ m/s.}$$

Το όριο θραύσης $T_{\theta\rho}$ του νήματος ισούται με το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το νήμα ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Έχουμε: } \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_\kappa \quad \text{ή} \quad T_{\theta\rho} - m_1 g = \frac{m_1 v_1^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T_{\theta\rho} = 60 \text{ N.}$$

β. Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος Σ αμέσως μετά την κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 . Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\Sigma \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v το μέτρο της κοινής ταχύτητας που αποκτούν το συσσωμάτωμα και η σανίδα. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα συσσωμάτωμα - σανίδα έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\alpha\rho\chi)} = \vec{p}_{\text{ολ}(\tau\epsilon\lambda)}$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)v_\Sigma = (m_1 + m_2 + M)v$$

$$\text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

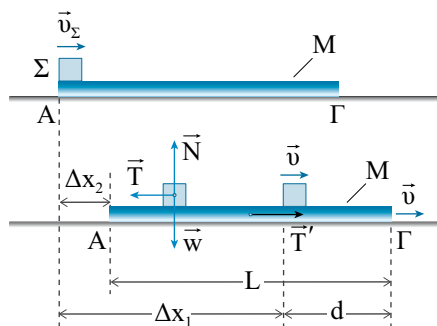
Το συνολικό ποσό θερμότητας που εκλύεται από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς πριν από την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται σε σχέση με τη σανίδα είναι: $Q_{\text{ολ}} = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda}$

$$\text{ή} \quad Q_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + M)v^2$$

$$\text{ή} \quad Q_{\text{ολ}} = 80 \text{ J.}$$

δ. Το μέτρο a_1 της επιβράδυνσης του συσσωματώματος κατά την ολίσθησή του πάνω στη σανίδα είναι:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a_1 \quad \text{ή} \quad T = (m_1 + m_2)a_1 \quad (1).$$



Αντικαθιστώντας την τριβή έχουμε:

$$\mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_1 \quad \text{ή} \quad a_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από την εξίσωση: $v = v_x - at_1$ ή $t_1 = 1 \text{ s}$.

Η μετατόπιση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\Delta x_1 = v_x t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ ή $\Delta x_1 = 3 \text{ m}$.

Έστω a_2 το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται η σανίδα στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως t_1 . Έχουμε: $\Sigma F_x = Ma_2$

$$\text{ή} \quad T' = Ma_2 \quad \text{ή} \quad T = Ma_2 \quad \text{ή, λόγω της (1):}$$

$$(m_1 + m_2)a_1 = Ma_2 \quad \text{ή} \quad a_2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

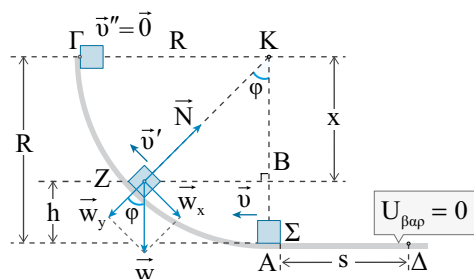
Η μετατόπιση της σανίδας από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = 1 \text{ m}.$$

Όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα η απόσταση d του συσσωματώματος από το άκρο Γ της σανίδας τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\Delta x_2 + L = \Delta x_1 + d$

$$\text{ή} \quad d = L + \Delta x_2 - \Delta x_1 \quad \text{ή} \quad d = 3 \text{ m}.$$

198. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος Σ αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Έχουμε:



$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g R$$

$$\text{ή} \quad v = 6 \text{ m/s}.$$

β. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v' της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία ανερχόμενο στο τεταρτοκύκλιο διέρχεται από το σημείο Z που βρίσκεται σε ύψος $h = 0,9 \text{ m}$ από το οριζόντιο δάπεδο, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Z της κίνησής του μετά την κρούση:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(Z)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + (m_1 + m_2) gh$$

$$\text{ή} \quad v' = 3\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο KBZ έχουμε:

$$\sin \varphi = \frac{x}{R} \quad \text{ή} \quad \sin \varphi = \frac{R - h}{R} \quad \text{ή} \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στη θέση Ζ, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa}$

$$\text{ή } N - w_y = \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{R}$$

$$\text{ή } N = (m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\phi + \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{R}$$

$$\text{ή } N = 45 \text{ N.}$$

γ. Επειδή κατά την κίνηση του συσσωματώματος στο τεταρτοκύκλιο η μηχανική του ενέργεια διατηρείται σταθερή, όταν επιστρέψει στο σημείο Α, το μέτρο της ταχύτητάς του θα είναι ίσο με το μέτρο v της ταχύτητας που είχε αμέσως μετά την κρούση.

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ μεταξύ του συσσωματώματος και του οριζόντιου δαπέδου, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του μεταξύ των θέσεων Α και Δ.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_N + W_w$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs + 0 + 0$$

$$\text{ή } \mu = 0,3.$$

δ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } v_1 = 9 \text{ m/s.}$$

Το συνολικό ποσό θερμότητας είναι:

$$Q_{\text{ολ}} = E_{\text{ολ}(\text{αρχ})} - E_{\text{ολ}(\text{τελ})} \quad \text{ή} \quad Q_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0$$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = 81 \text{ J.}$$

199. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(\text{αρχ})} = E_{\text{μηχ}(\text{τελ})}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gh_1$$

$$\text{ή } v_1 = 10 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(\text{αρχ})} = E_{\text{μηχ}(\text{τελ})}$$

$$\text{ή } m_2gh_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gh_1$$

$$\text{ή } v_2 = 30 \text{ m/s.}$$

β. Έστω ότι το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα $\vec{v}$ με φορά προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Σε αυτήν την περίπτωση το συσσωμάτωμα θα επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου a μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = (m_1 + m_2)a$$

$$\text{ή } a = 5 \text{ m/s}^2.$$

Για το διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα στο κεκλιμένο επίπεδο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση έως τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$s = vt_1 - \frac{1}{2}at_1^2 \quad \text{ή} \quad v = \frac{s}{t_1} + \frac{1}{2}at_1 \quad \text{ή} \quad v = 10 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } 10m_1 - 30m_2 = 10(m_1 + m_2)$$

$$\text{ή } m_2 = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Συνεπώς, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου επιταχυνόμενο με επιτάχυνση μέτρου $a = 5 \text{ m/s}^2$.

Για το διάστημα s που διανύει από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει:

$$s = vt_1 + \frac{1}{2}at_1^2 \quad \text{ή} \quad v = 0.$$

Από την Α.Δ.Ο έχουμε:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{E_{\text{μηχ}(\text{πριν})} - E_{\text{μηχ}(\text{μετά})}{E_{\text{μηχ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (m_1 + m_2)gh_1}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_1 gh_1 + m_2 gh_1} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 50\%.$$

200. Βλ. βασική άσκηση 13.

α. $v_1 = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}.$

β. $Q_k = 7,5 \text{ J}.$

γ. $s = 0,6 \text{ m}.$

δ. $\left| \frac{dp}{dt} \right| = 80 \text{ kg m/s}^2.$

201. α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας v_1 του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνησή του στο τεταρτοκύκλιο από τη θέση Α στη θέση Γ.

$$E_{\text{μηχ}(\Lambda)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 6 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζουμε το μέτρο v_Σ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\Sigma \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 3 \text{ m/s}.$$

β. Το συσσωμάτωμα κινείται στο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_Σ και προσκρούει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα συσσωματώμα - σώμα Σ_3 υπολογίζουμε το μέτρο της κοινής τους ταχύτητας v τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο έχει τη μέγιστη συσπείρωσή του $\Delta \ell_{\text{max}}$. Είναι:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{αρχ})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{τελ})}$$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2) v_\Sigma = (m_1 + m_2 + m_3) v$$

$$\text{ή} \quad v = 1 \text{ m/s}.$$

Η μέγιστη συσπείρωση $\Delta \ell_{\text{max}}$ του ελατηρίου υπολογίζεται από την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα συσσωματώμα - σώμα Σ_3 :

$$E_{\text{μηχ}(\text{αρχ})} = E_{\text{μηχ}(\text{τελ})}$$

$$\text{ή} \quad K_{\text{αρχ}} + U_{\text{ελ}(\text{αρχ})} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{ελ}(\text{τελ})}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\Sigma^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta \ell_{\text{max}})^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_{\text{max}} = 0,2 \text{ m}.$$

γ. Η επαφή του συσσωματώματος με το ελατήριο χάνεται τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος.

Έστω v' και v_3 τα μέτρα των ταχυτήτων του συσσωματώματος και του σώματος Σ_3 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα συσσωμάτωμα - σώμα Σ_3 , θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)}$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)v_\Sigma = (m_1 + m_2)v' + m_3v_3$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)(v_\Sigma - v') = m_3v_3 \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε έχουμε: $E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)}$

$$\text{ή } K_{αρχ} + U_{ελ(αρχ)} = K_{τελ} + U_{ελ(τελ)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\Sigma^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + 0$$

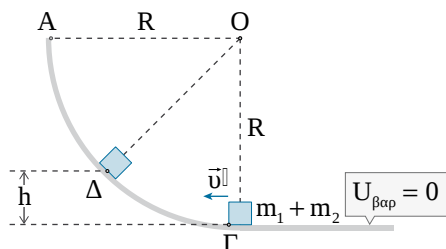
$$\text{ή } (m_1 + m_2)(v_\Sigma^2 - v'^2) = m_3v_3^2$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)(v_\Sigma - v')(v_\Sigma + v') = m_3v_3^2 \quad (2).$$

Από τη διαίρεση των σχέσεων (2) και (1) κατά μέλη προκύπτει: $v_\Sigma + v' = v_3 \quad (3).$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτει ότι $v' = -1 \text{ m/s}$, οπότε $|v'| = 1 \text{ m/s}$.

δ. Το συσσωμάτωμα μετά την απώλεια της επαφής του με το ελατήριο κινείται στο οριζόντιο δάπεδο προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα μέτρου $|v'|$ και αρχίζει να ανέρχεται στο τεταρτοκύκλιο φτάνοντας μέχρι το σημείο Δ το οποίο βρίσκεται σε ύψος h από το οριζόντιο δάπεδο. Για να υπολογίσουμε το ύψος h , εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.



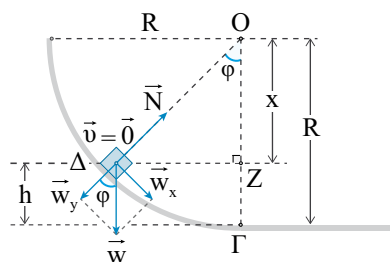
Έχουμε: $E_{μηχ(\Gamma)} = E_{μηχ(\Delta)}$

$$\text{ή } K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

$$\text{ή } h = \frac{v'^2}{2g} \quad \text{ή } h = 0,05 \text{ m}.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στο σημείο Δ είναι: το βάρος του $\vec{w}$ και η ακτινική δύναμη $\vec{N}$ από το τεταρτοκύκλιο. Τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία στο σημείο Δ ισχύει: $\Sigma \vec{F}_{ακτ} = \vec{0}$ ή $\vec{N} + \vec{w}_y = \vec{0}$ ή $N - w_y = 0$ ή $N = w \sin \varphi$ ή $N = (m_1 + m_2)g \sin \varphi \quad (4).$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΔ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα έχουμε: $\sin \varphi = \frac{x}{R}$

$$\text{ή } \sin \varphi = \frac{R - h}{R} \quad \text{ή } \sin \varphi = \frac{35}{36}.$$

Άρα, από την (4) προκύπτει: $N = \frac{350}{18} \text{ N}.$

202. α. Έχουμε: $K_{\beta\lambda(\text{μετά})} = \frac{25}{100} K_{\beta\lambda(\text{πριν})}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{ή } v = \frac{v_0}{2}$$

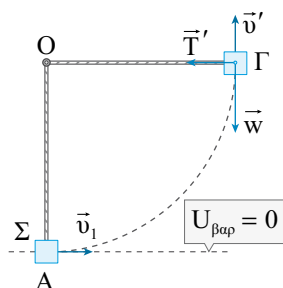
$$\text{ή } v = 200 \text{ m/s.}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } mv_0 = Mv_1 + mv \quad \text{ή } v_1 = 10 \text{ m/s.}$$

β. Υπολογίζουμε το μέτρο v' της ταχύτητας του σώματος Σ στη θέση όπου το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο μετά την κρούση, εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ μετά την κρούση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



META

$$E_{\mu\chi(A)} = E_{\mu\chi(\Gamma)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + Mg\ell \quad \text{ή } v' = 8 \text{ m/s.}$$

Στη θέση Γ η τάση που ασκείται στο σώμα Σ από το νήμα δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\text{Επομένως: } T' = F_{\kappa} \quad \text{ή } T' = \frac{Mv'^2}{\ell}$$

$$\text{ή } T' = \frac{640}{9} \text{ N.}$$

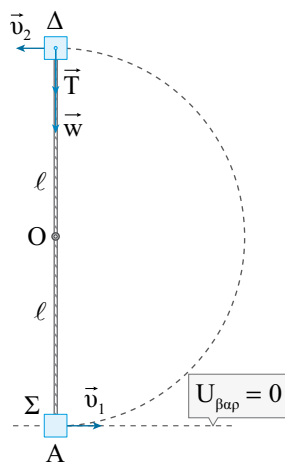
γ. Έχουμε: $\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_w}{dt}$

$$\text{ή } \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{(-wds)}{dt} \quad \text{ή } \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = +wv'$$

$$\text{ή } \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = +Mgv' \quad \text{ή } \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = +160 \text{ J/s.}$$

δ. Για να εκτελέσει το σώμα Σ ανακύκλωση μετά την κρούση, πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση με το νήμα τεντωμένο ($T \geq 0$).

Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_2 της ταχύτητας με την οποία το σώμα Σ διέρχεται από το σημείο Δ, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Δ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Α:



$$E_{\mu\chi(A)} = E_{\mu\chi(\Delta)} \quad \text{ή } K_A + U_A = K_{\Delta} + U_{\Delta}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}Mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + Mg2\ell$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4g\ell} \quad \text{ή } v_2 = \sqrt{28} \text{ m/s.}$$

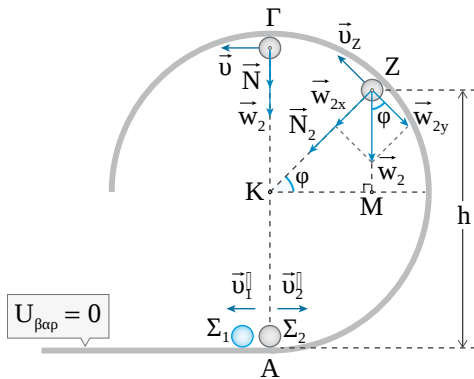
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του είναι η τάση $\vec{T}$ του νήματος και το βάρος του $\vec{w}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_k$

$$\text{ή } T + w = \frac{Mv_2^2}{\ell} \quad \text{ή } T = \frac{Mv_2^2}{\ell} - Mg$$

$$\text{ή } T = 11,1 \text{ N.}$$

Αφού $T > 0$, το νήμα στη θέση Δ είναι τεντωμένο και το συσσωμάτωμα μετά την κρούση εκτελεί ανακύκλωση.

203. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από το ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς του.



Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στη θέση Γ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_k$

$$\text{ή } N + w_2 = \frac{m_2 v^2}{R} \quad \text{ή } N = \frac{m_2 v^2}{R} - m_2 g \quad (1).$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ_2 ανακύκλωση, πρέπει να ισχύει: $N \geq 0$ ή, λόγω της (1):

$$m_2 g \leq \frac{m_2 v^2}{R} \quad \text{ή } v \geq \sqrt{gR}, \text{ οπότε:}$$

$$v_{\min} = \sqrt{3,2} \text{ m/s.}$$

Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μεταξύ των θέσεων A και Γ μετά την κρούση έχουμε: $E_{\mu\chi(A)} = E_{\mu\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\min}^2 + m_2 g 2R$$

$$\text{ή } v_2' = 4 \text{ m/s.}$$

β. Το μέτρο v'_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{s}{\Delta t} \quad \text{ή } v_1' = 4 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή } m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\text{ή } v_1 = 8 \text{ m/s.}$$

Για τις κινητικές ενέργειες του συστήματος πριν και μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 32 \text{ J} \quad \text{και}$$

$$K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 32 \text{ J.}$$

Άρα η κρούση είναι ελαστική.

$$\gamma. \text{ Έχουμε: } \pi = \frac{K_{2(\text{μετά})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 75\%.$$

δ. Το μέτρο της ταχύτητας v_z του Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από το σημείο Z του κυκλικού οδηγού υπολογίζεται εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Z της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(Z)} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_z'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_z^2 + m_2 gh$$

$$\text{ή} \quad v_z = \sqrt{6,4} \text{ m/s.}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στο σημείο Z, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\text{Επομένως: } \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa}$$

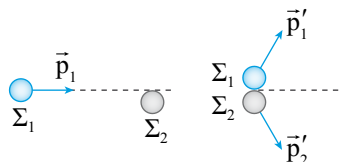
$$\text{ή} \quad N_2 = \frac{m_2 v_z^2}{R} - m_2 g \eta \mu \varphi \quad (2).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο KMZ έχουμε:

$$\eta \mu \varphi = \frac{(ZM)}{(KZ)} \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi = \frac{h - R}{R} \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi = \frac{1}{2}.$$

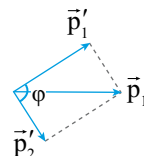
Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση (2) βρίσκουμε: $N_2 = 45 \text{ N}$.

204. α. Οι ορμές $\vec{p}'_1$ και $\vec{p}'_2$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$ ή $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ (1).

Σύμφωνα με τη σχέση (1), από το διανυσματικό άθροισμα των ορμών $\vec{p}'_1$ και $\vec{p}'_2$ των σφαιρών μετά την κρούση προκύπτει η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση.



Συνεπώς, για το μέτρο της ορμής $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση ισχύει:

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \varphi} \quad (2) \quad \text{όπου } \varphi \text{ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών } \vec{p}'_1 \text{ και } \vec{p}'_2.$$

Από τη (2) έχουμε: $p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \varphi$

$$\text{ή} \quad (m_1 v_1)^2 = (m_1 v_1')^2 + (m_2 v_2')^2 + 2m_1 v_1' m_2 v_2' \cos \varphi$$

$$\text{ή} \quad m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 + 2m_1 m_2 v_1' v_2' \cos \varphi.$$

Επειδή $\varphi = 90^\circ$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2$

$$\text{ή} \quad m_1^2 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2^2 v_2'^2 \quad (3).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επομένως: $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2 \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (3) και (4) προκύπτει: $m_1 = m_2$ ή $\frac{m_1}{m_2} = 1$.

β. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0}$ ή $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$,

οπότε: $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$ ή $|\Delta \vec{p}_2| = 4 \text{ kg m/s}$.

γ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση είναι: $K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$ (5).

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2'$
ή $|\Delta p_2| = m_2 v_2'$ (6).

Με διαίρεση κατά μέλη των (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{K_2}{|\Delta p_2|} = \frac{v_2'}{2} \quad \text{ή} \quad v_2' = 4 \text{ m/s} \quad (7).$$

Με αντικατάσταση της (7) στην (6) προκύπτει ότι $m_2 = 1 \text{ kg}$. Συνεπώς, είναι $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$.

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στην (4) βρίσκουμε: $v_1' = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$.

δ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από
είναι: $\pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 25\%.$

205. α. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $x'x$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_{1x}' \quad \text{ή} \quad v_{1x}' = 2 \text{ m/s}. \quad (1)$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σφαιρών στον άξονα $y'y$, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$0 = m_1 v_{1y}' - m_2 v_2' \quad \text{ή} \quad v_{1y}' = v_2' \quad (2).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad v_1^2 + v_2^2 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + v_2'^2 \quad \text{ή, λόγω των (1)}$$

$$\text{και (2):} \quad v_2' = 2\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

Συνεπώς, από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι $v_{1y}' = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$, οπότε τελικά:

$$v_1' = \sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2} \quad \text{ή} \quad v_1' = 2\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

β. Έχουμε: $\epsilon\phi\theta = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'}$ ή $\epsilon\phi\theta = \sqrt{2}$.

γ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης στον άξονα $x'x$ είναι:

$$\Delta \vec{p}_{2x} = \vec{p}_{2x(\text{τελ})} - \vec{p}_{2x(\text{αρχ})} \quad \text{ή} \quad \Delta p_{2x} = 0 - m_2 v_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_{2x} = -2 \text{ kg m/s}.$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 στον άξονα $y'y$ είναι: $\Delta \vec{p}_{2y} = \vec{p}_{2y(\text{τελ})} - \vec{p}_{2y(\text{αρχ})}$

$$\text{ή} \quad \Delta p_{2y} = -m_2 v_2' - 0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_{2y} = -2\sqrt{2} \text{ kg m/s}.$$

$$\text{Επομένως:} \quad \Delta p_2 = \sqrt{(\Delta p_{2x})^2 + (\Delta p_{2y})^2}$$

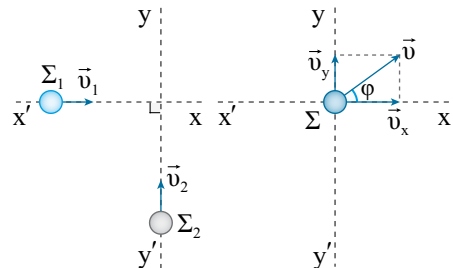
$$\text{ή} \quad |\Delta p_2| = 2\sqrt{3} \text{ kg m/s}.$$

Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται κατά την κρούση, ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{οπότε:}$$

$$|\Delta p_1| = |\Delta p_2| \quad \text{ή} \quad |\Delta p_1| = 2\sqrt{3} \text{ kg m/s}.$$

206. α. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}$ στις συνιστώσες $\vec{v}_x$ και $\vec{v}_y$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})x} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})x}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_x$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{\text{συνθ}} \quad \text{ή } v_1 = 20 \text{ m/s.}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y$: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})y} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})y}$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_y$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\text{ημθ}} \quad \text{ή } v_2 = 20 \text{ m/s.}$$

β. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 50\%.$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$ έχουμε:

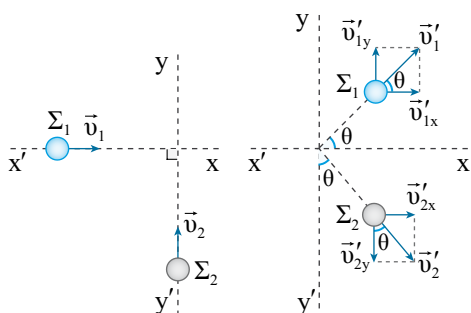
$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})x} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})x} \quad \text{ή } m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = m_1 v'_1 \sin \theta + m_2 v'_2 \eta \mu \theta \quad (1).$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})y} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})y} \quad \text{ή } m_2 v_2 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = m_1 v'_1 \eta \mu \theta - m_2 v'_2 \sin \theta \quad (2).$$



Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτουν: $v'_1 = 28 \text{ m/s}$ και $v'_2 = 4 \text{ m/s}$.

δ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 στον άξονα $x'x$ εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_{1x} = \vec{p}_{1x(\text{τελ})} - \vec{p}_{1x(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή } \Delta p_{1x} = m_1 v'_1 \sin \theta - m_1 v_1$$

$$\text{ή } \Delta p_{1x} = -3,2 \text{ kg m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 στον άξονα $y'y$ εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_{1y} = \vec{p}_{1y(\text{τελ})} - \vec{p}_{1y(\text{αρχ})}$$

$$\text{ή } \Delta p_{1y} = m_1 v'_1 \eta \mu \theta - 0$$

$$\text{ή } \Delta p_{1y} = 22,4 \text{ kg m/s.}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta p_1 = \sqrt{(\Delta p_{1x})^2 + (\Delta p_{1y})^2}$$

$$\text{ή } \Delta p_1 = 16\sqrt{2} \text{ kg m/s.}$$

207. α. Έστω u το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα σώμα Σ - βλήμα στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})x} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})x} \quad \text{ή } m v_{0x} = (m + M) u$$

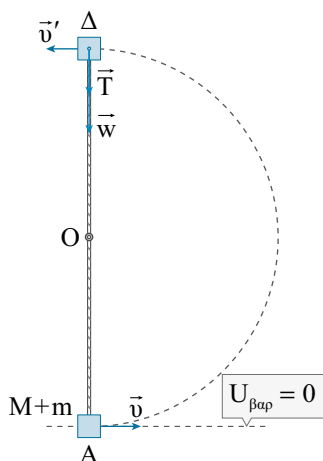
$$\text{ή } m v_0 \sin \varphi = (m + M) u \quad \text{ή } u = 6 \text{ m/s.}$$

$$Q_{\text{κρ}} = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή } Q_{\text{κρ}} = 5,910 \text{ J.}$$

β. Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα ανακύκλωση, πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση με το νήμα τεντωμένο.

Συνεπώς, στη θέση Δ πρέπει να ισχύει $T \geq 0$.

Έστω ότι το συσσωμάτωμα φτάνει στη θέση Δ με ταχύτητα μέτρου u' .



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m+M)v^2 + 0 = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 + (m+M)g2\ell$$

$$\text{ή} \quad v' = \sqrt{12} \text{ m/s.}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στη θέση Δ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F = F_\kappa$

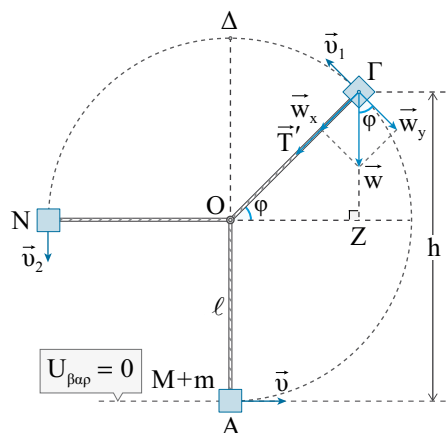
$$\text{ή} \quad T + (M+m)g = \frac{(M+m)v'^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{(M+m)v'^2}{\ell} - (M+m)g$$

$$\text{ή} \quad T = 50 \text{ N.}$$

Συνεπώς, το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα εκτελέσει ανακύκλωση.

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στη θέση Γ.



Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(M+m)v^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)v_1^2 + (M+m)gh$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 3\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ έχουμε:

$$\eta\mu\phi = \frac{(\Gamma Z)}{(\Gamma O)} = \frac{h-\ell}{\ell} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi = 30^\circ.$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα στο σημείο Γ, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_\kappa$

$$\text{ή} \quad T' + w_x = \frac{(M+m)v_1^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T' = \frac{(M+m)v_1^2}{\ell} - (M+m)g\eta\mu\phi$$

$$\text{ή} \quad T' = 125 \text{ N.}$$

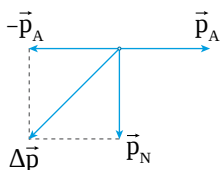
δ. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα γίνεται για δεύτερη φορά οριζόντιο μετά την κρούση (θέση Ν).

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Ν έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(N)}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 + (M+m)g\ell$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{24} \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος κατά την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Ν είναι: $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \text{ ή } \Delta \vec{p} = \vec{p}_N - \vec{p}_A$
 ή $\Delta \vec{p} = \vec{p}_N + (-\vec{p}_A)$ όπου $\vec{p}_N$ και $\vec{p}_A$ είναι οι ορμές του συσσωματώματος στις θέσεις Ν και Α αντίστοιχα.



Επειδή τα διανύσματα $\vec{p}_N$ και $-\vec{p}_A$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο $|\Delta p|$ της μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Ν είναι:

$$|\Delta p| = \sqrt{p_A^2 + p_N^2}$$

$$\text{ή } |\Delta p| = \sqrt{[(M+m)v]^2 + [(M+m)v_2]^2}$$

$$\text{ή } |\Delta p| = 10\sqrt{15} \text{ kg m/s ή } |\Delta p| = 38,7 \text{ kg m/s.}$$

208. α. Επειδή το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση κινείται με σταθερή ταχύτητα στο κεκλιμένο επίπεδο, έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } w_{1x} = T_1$$

$$\text{ή } m_1 g \mu = \mu_1 m_1 g \sigma \text{ ή } \epsilon \phi \phi = \mu_1$$

$$\text{ή } \epsilon \phi \phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } \phi = 30^\circ.$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_T + W_N \text{ ή}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -(m_1 + m_2)g\mu\phi s$$

$$-\mu_2(m_1 + m_2)g\sigma\mu\phi s + 0$$

$$\text{ή } v = 3 \text{ m/s.}$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα $x'x$ για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας θετική τη φορά από τη βάση προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})x} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})x}$$

$$\text{ή } m_2 v_{2x} - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } m_2 v_2 \sigma \mu \phi - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } v_2 = 50\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. Το συνολικό ποσό θερμότητας είναι:

$$Q_{\text{ολ}} = Q_K + Q_T$$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})} + |W_T|$$

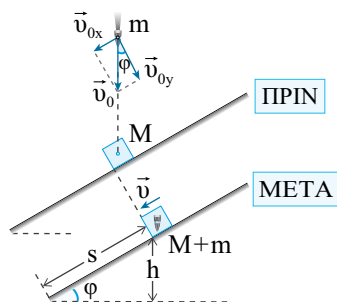
$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$+ \mu_2(m_1 + m_2)g\sigma\mu\phi s$$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = 768 \text{ J.}$$

209. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ του βλήματος πριν από την κρούση στις συνιστώσες της $\vec{v}_{0x}$ και $\vec{v}_{0y}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα x' για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)x} = \vec{P}_{ολ(μετά)x} \quad \text{ή} \quad m v_{0x} = (m+M)v$$

$$\text{ή} \quad m v_0 \eta \mu \varphi = (m+M)v \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

β. Έχουμε: $E_{απ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad E_{απ} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m+M) v^2$$

$$\text{ή} \quad E_{απ} = 242 \text{ J.}$$

γ. Έστω s το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα στο κεκλιμένο επίπεδο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.

$$\text{Από το σχήμα έχουμε: } \eta \mu \varphi = \frac{h}{s} \quad \text{ή} \quad s = 14 \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης α με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα στο κεκλιμένο επίπεδο μετά την κρούση προκύπτει:

$$s = vt + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του συσσωματώματος στο κεκλιμένο επίπεδο έχουμε: $\Sigma F_x = (m+M)\alpha$

$$\text{ή} \quad w_x - T = (M+m)\alpha$$

$$\text{ή} \quad (M+m)g \eta \mu \varphi - \mu(M+m)g \sigma \nu \varphi = (M+m)\alpha$$

$$\text{ή} \quad g \eta \mu \varphi - \mu g \sigma \nu \varphi = \alpha$$

$$\text{ή} \quad \mu = \frac{\epsilon \varphi - \frac{\alpha}{g \sigma \nu \varphi}}{\sigma \nu \varphi} \quad \text{ή} \quad \mu = 0,5.$$

δ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$v_1 = v + \alpha t_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = 7 \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα τη χρονική στιγμή t_1 εξαιτίας της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το κεκλιμένο επίπεδο είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = T v_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{dQ}{dt} = \mu (m+M) g \sigma \nu \varphi v_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dQ}{dt} = 84 \text{ J/s.}$$

Κεφάλαιο 2ο: Μηχανική στερεού σώματος

2.1 Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων:

Στροφική κίνηση στερεού σώματος

ΘΕΜΑΤΑ Α

Α. Θέματα πολλαπλής επιλογής

6. α	7. γ	8. β	9. γ	10. α	11. α
12. δ	13. β	14. δ	15. α	16. δ	17. δ

Β. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

18.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ	στ. Σ
19.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ	
20.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ	
21.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Λ	
22.	α. Λ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ	
23.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ	

24. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Ισχύει: $v_1 = \omega_1 r_A$ ή $v_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 r_A$ (1)

και $v_2 = \omega_2 r_B$ ή $v_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} 2t_1 4r_A$

ή $v_2 = 8\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 r_A$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $v_2 = 8v_1$.

25. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Ισχύει: $N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$ ή $N_1 = \frac{\omega_0 t_1}{2\pi}$ (1) και

$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi}$ ή $N_2 = \frac{\omega_0 2t_1}{2\pi}$ ή $N_2 = \frac{\omega_0 t_1}{\pi}$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $N_2 = 2N_1$.

26. Α. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τη σχέση: $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ (1).

Από τη σχέση (1) για $\omega = 0$ και $t = t_1$ προκύπτει: $0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (2).

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{t_1}{2}$. Είναι:

$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{t_1}{2}$

ή, λόγω της σχέσης (2): $\omega = \frac{\omega_0}{2}$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Ισχύει: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$,

ή λόγω της σχέσης (2): $\Delta\theta_1 = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (3) και

$\Delta\theta_2 = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2$

ή $\Delta\theta_2 = \omega_0 \frac{t_1}{2} - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{t_1^2}{4}$,

ή, λόγω της σχέσης (2): $\Delta\theta_2 = \frac{3}{8} \frac{\omega_0^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (4).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και

(4) προκύπτει: $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{4}{3}$ ή $\Delta\theta_2 = 0,75\Delta\theta_1$.

27. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Ισχύει: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$ (1) και $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} t_1$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

(2) έχουμε: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 2\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}$ (3).

Β. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Ισχύει: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}}{\frac{\Delta\theta_2}{2\pi}}$ ή $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}$

ή $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2}{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} t_1^2}$

ή, λόγω της σχέσης (3): $\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$.

28. Α. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Είναι: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega R}{\frac{\omega R}{2}}$ ή $\frac{v_A}{v_B} = 2$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Είναι: $\frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{\omega^2 R}{\omega^2 \frac{R}{2}}$ ή $\frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = 2$.

29. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ του τροχού Α στο χρονικό διάστημα Δt δίνεται από τη σχέση:

$\Delta\theta_1 = \omega\Delta t$ (1). Η γωνία στροφής $\Delta\theta_2$ του τροχού Β στο ίδιο χρονικό διάστημα δίνεται από τη σχέση: $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2$ (2).

Επειδή ισχύει: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{\Delta t}$,

η σχέση (2) γράφεται: $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\omega\Delta t$ (3).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (3) προκύπτει: $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = 2$ ή $\Delta\theta_1 = 2\Delta\theta_2$ (4).

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}}{\frac{\Delta\theta_2}{2\pi}} \text{ ή, λόγω της σχέσης (4): } \frac{N_1}{N_2} = 2.$$

30. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι δύο δίσκοι επιβραδύνονται με την ίδια γωνιακή επιβράδυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Έστω t_A η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται ο δίσκος Α.

Ισχύει: $\omega_A = \omega_{0(A)} - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_A$ ή $0 = \omega_{0(A)} - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_A$

$$\text{ή } t_A = \frac{\omega_{0(A)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (1).$$

Η γωνία στροφής του δίσκου Α από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_A υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta_A = \omega_{0(A)}t_A - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_A^2$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Delta\theta_A = \frac{\omega_{0(A)}^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (2).$$

Έστω t_B η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται ο δίσκος Β.

Ισχύει: $\omega_B = \omega_{0(B)} - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_B$

$$\text{ή } 0 = \omega_{0(B)} - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_B \text{ ή } t_B = \frac{\omega_{0(B)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (3).$$

Η γωνία στροφής του δίσκου Β από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_B υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta_B = \omega_{0(B)}t_B - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_B^2$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (3), } \Delta\theta_B = \frac{\omega_{0(B)}^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (4).$$

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{N_A}{N_B} = \frac{\frac{\Delta\theta_A}{2\pi}}{\frac{\Delta\theta_B}{2\pi}}$$

ή, λόγω των σχέσεων (2) και (4):

$$\frac{N_A}{N_B} = \left(\frac{\omega_{0(A)}}{\omega_{0(B)}} \right)^2 \text{ ή } \frac{N_A}{N_B} = \frac{1}{4} \text{ ή } N_A = \frac{N_B}{4}.$$

31. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1$ (1). Το μέτρο ω_2 της γωνιακής ταχύτητας του στερεού τη χρονική στιγμή $t_2 = 3t_1$ είναι: $\omega_2 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(t_2 - t_1)$

$$\text{ή } \omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1 - \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{2}2t_1 \text{ ή } \omega_2 = 0.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2$.

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3t_1$.

$$\text{Είναι: } \Delta\theta_2 = \omega_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(t_2 - t_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1 \cdot 2t_1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{2}(2t_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2.$$

Συνεπώς, η γωνία που διαγράφει το στερεό σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3t_1$, είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = \frac{3}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2.$$

32. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω $\bar{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Τη χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος επιταχύνεται, οπότε το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης $\bar{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)}$ έχει την ίδια φορά με τη γωνιακή του ταχύτητα $\bar{\omega}$. Έστω $\bar{\omega}'$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 . Η φορά περιστροφής του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 είναι η ίδια με τη φορά περιστροφής του τη χρονική στιγμή t_1 . Τη χρονική στιγμή t_3 ο δίσκος επιβραδύνεται, οπότε το διάνυσμα της γωνιακής του επιτάχυνσης $\bar{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$ έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας $\bar{\omega}'$. Συνεπώς, τα διανύσματα $\bar{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)}$ και $\bar{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$ έχουν αντίθετη φορά.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

$$\text{Ισχύει: } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\omega_1 - 0}{2t_1 - 0}$$

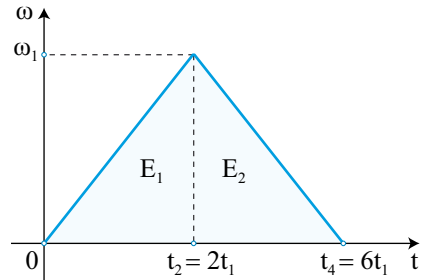
$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\omega_1}{2t_1} \quad (1).$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{0 - \omega_1}{6t_1 - 2t_1} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = -\frac{\omega_1}{4t_1} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2)

$$\text{προκύπτει: } \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = -\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{2}.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η γ.



$$\text{Ισχύει: } \Delta\theta_1 = E_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \omega_1 t_2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = \omega_1 t_1 \quad (1)$$

$$\text{και } \Delta\theta_2 = E_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \omega_1 (t_4 - t_2)$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = 2\omega_1 t_1 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\Delta\theta_2 = 2\Delta\theta_1.$$

33. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Τα υλικά σημεία της περιφέρειας των δύο δίσκων έχουν κάθε χρονική στιγμή γραμμικές ταχύτητες ίσων μέτρων.

$$\text{Δηλαδή, ισχύει: } v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt}$$

$$\text{ή } \alpha_{\epsilon(1)} = \alpha_{\epsilon(2)} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} R_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} R_2$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{2} \quad (1).$$

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου (1) σε χρονικό διάστημα Δt .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Delta t^2 \quad (2).$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου (2) σε χρονικό διάστημα Δt .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t^2 \quad (3).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και

(3) προκύπτει: $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}}$ ή, λόγω της σχέ-

σης (1): $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = 2$ (4).

Για το πλήθος των περιστροφών N_1 και N_2 που εκτελούν οι δίσκοι (1) και (2) αντίστοιχα

σε χρονικό διάστημα Δt ισχύει: $N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$ (5)

και $N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi}$ (6). Με διαίρεση κατά μέλη των

σχέσεων (5) και (6) προκύπτει: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}$ ή,

λόγω της σχέσης (4): $\frac{N_1}{N_2} = 2$ ή $N_2 = \frac{N_1}{2}$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Είναι: $\alpha_{\kappa(1)} = \frac{v_1^2}{R_1}$ (7) και $\alpha_{\kappa(2)} = \frac{v_2^2}{R_2}$ (8). Με

διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (7) και (8)

προκύπτει: $\frac{\alpha_{\kappa(1)}}{\alpha_{\kappa(2)}} = \frac{v_1^2 R_2}{v_2^2 R_1}$ ή $\frac{\alpha_{\kappa(1)}}{\alpha_{\kappa(2)}} = 2$

ή $\alpha_{\kappa(2)} = \frac{\alpha_{\kappa(1)}}{2}$.

Γ. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $v_1 = v_2$

ή $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ ή $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$ ή $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$

ή $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$.

34. α. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δακτυλίου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10$ s. Είναι:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \omega\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 100 \text{ rad.}$$

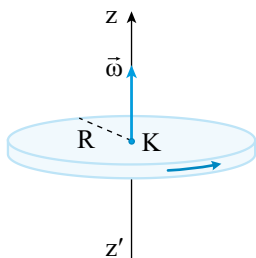
β. Έστω N το πλήθος των περιστροφών του δακτυλίου σε χρονικό διάστημα Δt . Είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (50/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

γ. Έστω v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δακτυλίου. Είναι: $v = \omega R$ ή $v = 4$ m/s.

δ. Έστω s το μήκος του τόξου που διανύει ένα υλικό σημείο της περιφέρειας του δακτυλίου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10$ s. Είναι: $s = R\Delta\theta$ ή $s = 40$ m.

35. α. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Επειδή ο δίσκος περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ($\vec{\omega}$) είναι προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

β. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 40$ s. Είναι: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = \omega\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 200 \text{ rad.}$$

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 40$ s υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (100/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

γ. Έστω r η απόσταση του υλικού σημείου Α από τον άξονα περιστροφής του δίσκου. Ισχύει:

$$v_A = \omega r \quad \text{ή} \quad r = \frac{v_A}{\omega} \quad \text{ή} \quad r = 1 \text{ m.}$$

δ. Έστω $\alpha_{\kappa(B)}$ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου Β της περιφέρειας του δίσκου. Είναι: $\alpha_{\kappa(B)} = \omega^2 R$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\kappa(B)} = 50 \text{ m/s}^2.$$

Επειδή το σημείο Β εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο a_B της επιτάχυνσής του είναι ίσο με το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσής του. Συνεπώς, ισχύει: $a_B = \alpha_{\kappa(B)}$ ή $a_B = 50 \text{ m/s}^2$.

36. α. Έστω v_A το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου Α. Είναι:

$$v_A = \frac{s}{t} \quad \text{ή} \quad v_A = 10 \text{ m/s.}$$

β. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου. Ισχύει:

$$v_A = \omega R \quad (1) \quad \text{και} \quad \alpha_{\kappa(A)} = \omega^2 R \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{v_A}{\alpha_{\kappa(A)}} = \frac{1}{\omega} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{v_A}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $R = \frac{v_A}{\omega}$

ή $R = 0,5 \text{ m}$.

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5 \text{ s}$. Είναι $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ή $\Delta\theta = \omega\Delta t$ ή $\Delta\theta = 100 \text{ rad}$. Έστω N το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5 \text{ s}$. Είναι: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = (50/\pi)$ περιστροφές.

37. α. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος. Ισχύει: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Έστω r η ακτίνα περιστροφής του σημείου B. Είναι: $v_B = \omega r$ ή $r = 4 \text{ m}$.

β. Έστω α_κ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του υλικού σημείου B. Είναι: $\alpha_\kappa = \omega^2 r$ ή $\alpha_\kappa = 400 \text{ m/s}^2$.

γ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία που διαγράφει το στερεό στο χρονικό διάστημα Δt κατά το οποίο έχει εκτελέσει $N = (50/\pi)$ περιστροφές. Είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \text{ ή } \Delta\theta = N \cdot 2\pi \text{ ή } \Delta\theta = 100 \text{ rad.}$$

Επειδή το στερεό εκτελεί ομαλή στροφοτική κίνηση, ισχύει: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$ ή $\Delta t = 10 \text{ s}$.

δ. Έστω s το μήκος του τόξου που διαγράφει το υλικό σημείο B σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5 \text{ s}$. Ισχύει: $s = v_B \Delta t$ ή $s = 200 \text{ m}$.

38. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού σώματος.

$$\text{Είναι: } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1}{t_1} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

β. Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 50 \text{ rad}$.

γ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } \omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \text{ ή } \omega_2 = 8 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου A τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$v_A = \omega_2 r \text{ ή } v_A = 0,8 \text{ m/s.}$$

δ. Είναι: $\alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$ ή $\alpha_\epsilon = 0,4 \text{ m/s}^2$.

39. α. Είναι: $\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2$.

Το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \text{ ή } \omega_1 = 26 \text{ rad/s.}$$

β. Έστω N το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{\omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2}{2\pi}$$

ή $N = (36/\pi)$ περιστροφές.

γ. Είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ή $\Delta\omega = 4 \text{ rad/s}$.

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \text{ ή } \omega_2 = 30 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $v = \omega_2 R$ ή $v = 6 \text{ m/s}$.

40. α. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία περιστροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = N 2\pi \text{ ή } \Delta\theta_1 = 100 \text{ rad.}$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού. Είναι: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1 \text{ ή } \omega_1 = 20 \text{ rad/s.}$$

γ. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 9 \text{ s}$. Είναι: $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2$ ή $\Delta\theta_2 = 81 \text{ rad}$.

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του τροχού στη διάρκεια του 10ου δευτερολέπτου. Είναι:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2 \text{ ή } \Delta\theta = 19 \text{ rad.}$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu}t_2 \text{ ή } \omega_2 = 18 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \omega_2^2 R \text{ ή } \alpha_{\kappa} = 162 \text{ m/s}^2.$$

41. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου. Είναι: $|\alpha_{\gamma\omega\nu}| = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t}$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{|0 - \omega_0|}{t_1 - 0} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

$$\text{β. Είναι: } \Delta\theta = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta = 100 \text{ rad.}$$

$$\text{γ. Είναι: } N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \text{ ή } N = (50/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ (δύο δευτερόλεπτα πριν ακινητοποιηθεί). Είναι:

$$\omega_2 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_2 \text{ ή } \omega_2 = 4 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega_2 R$ ή $v = 0,8 \text{ m/s}$.

42. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του τροχού. Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού είναι ίσο με μηδέν ($\omega_1 = 0$). Συνεπώς, ισχύει:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1 \text{ ή } 0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (1).$$

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως της χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $\Delta\theta_1 = N2\pi$ ή $\Delta\theta_1 = 40 \text{ rad}$. Επειδή ο τροχός εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση, ισχύει: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2$ ή, λόγω

$$\text{της σχέσης (1): } \Delta\theta_1 = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta_1}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $t_1 = 2 \text{ s}$.

$$\text{γ. Είναι: } \alpha_{\varepsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \text{ ή } \alpha_{\varepsilon} = 16 \text{ m/s}^2.$$

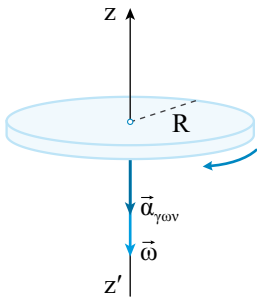
δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή $t = \frac{t_1}{2}$. Είναι:

$$\omega_2 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{t_1}{2} \text{ ή } \omega_2 = 20 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\kappa} = \omega_2^2 R$ ή $\alpha_{\kappa} = 320 \text{ m/s}^2$. Το μέτρο της επιτάχυνσης a ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\varepsilon}^2} \text{ ή } a = \sqrt{102.656} \text{ m/s}^2.$$

43. α. Επειδή ο δίσκος περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$ κάθε χρονική στιγμή, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω. Αφού ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση το διάνυσμα της γωνιακής του επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια φορά με τη γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$.



β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_1 του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$. Έστω v_B το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v_B = \omega_1 R$ ή $v_B = 4 \text{ m/s}$.

γ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως της χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 2 \text{ rad}$.

δ. Έστω α_ϵ το μέτρο της επιτροχίας επιτάχυνσης του σημείου B. Είναι: $\alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_\epsilon = 4 \text{ m/s}^2$.

Έστω α_κ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\alpha_\kappa = \omega_1^2 R$ ή $\alpha_\kappa = 16 \text{ m/s}^2$. Έστω a το μέτρο

της επιτάχυνσης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $a = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\epsilon^2}$ ή $a = \sqrt{272} \text{ m/s}^2$.

44. α. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία που διαγράφει ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$ ή $\Delta\theta_1 = N \cdot 2\pi$ ή $\Delta\theta_1 = 1.600 \text{ rad}$.

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$ ή $t_1 = 20 \text{ s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_1 = 160 \text{ rad/s}$.

β. Έστω α_κ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\alpha_\kappa = \omega_1^2 R$ ή $\alpha_\kappa = 5.120 \text{ m/s}^2$.

γ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $v_B = \omega_2 R$ ή $\omega_2 = 200 \text{ rad/s}$. Είναι: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $t_2 = 25 \text{ s}$.

δ. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του τροχού στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_1 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = \omega_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (t_2 - t_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = 900 \text{ rad.}$$

Το μήκος s του τόξου που διανύει το σημείο B από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τον τύπο: $s = R\Delta\theta_2$ ή $s = 180 \text{ m}$.

45. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Είναι: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1} \quad \text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

β. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = 100 \text{ rad}.$$

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή } N = (50/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

γ. Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t' = 3 \text{ s}$. Είναι:

$$\omega' = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t' \quad \text{ή } \omega' = 22 \text{ rad/s}.$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta'$ του δίσκου στη χρονική διάρκεια Δt του 4ου δευτερολέπτου της κίνησής του $[\Delta t = (4 - 3) \text{ s}]$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta' = \omega' \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2$

$$\text{ή } \Delta\theta' = 24 \text{ rad}.$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$.

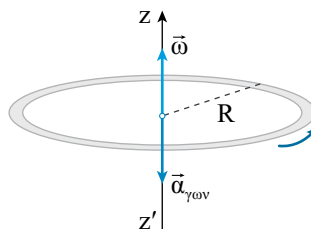
Είναι: $\omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$. Έστω α_κ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\alpha_\kappa = \omega_2^2 R \quad \text{ή } \alpha_\kappa = 2.500 \text{ m/s}^2.$$

Το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο B τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $F_\kappa = m \alpha_\kappa$

$$\text{ή } F_\kappa = 2,5 \text{ N}.$$

46. α. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ του δακτυλίου μια τυχαία χρονική στιγμή t πριν ακινητοποιηθεί έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά προς τα πάνω (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού). Επειδή ο δακτύλιος επιβραδύνεται, το διάνυσμα της γωνιακής του επιβράδυνσης $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ έχει κάθε χρονική στιγμή, για όσο χρόνο διαρκεί η επιβραδυνόμενη κίνηση, αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας.



Το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δακτυλίου είναι: $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0 - \omega}{t} \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 4 \text{ s}$ και $\omega = 0$ προκύπτει: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2$.

β. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = 40 \text{ rad}.$$

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί ο δακτύλιος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή } N = (20/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

γ. Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή $t' = 2 \text{ s}$.

$$\text{Είναι: } \omega' = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t' \quad \text{ή } \omega' = 10 \text{ rad/s}.$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v_B του υλικού σημείου B τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s υπολογίζεται από τη σχέση: $v_B = \omega R$

$$\text{ή } v_B = 2 \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου B τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s υπολογίζεται από τη σχέση: $K_B = \frac{1}{2} m v_B^2$ ή $K_B = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

δ. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega'(t_1 - t') - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (t_1 - t')^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = 10 \text{ rad.}$$

Το μήκος του τόξου s που διανύει το σημείο B από τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $s = R\Delta\theta_2$ ή $s = 2 \text{ m}$.

47. α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1$ και $\omega = 0$ προκύπτει: $0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_0 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ (2).

Η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$$

$$\text{ή } t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \quad \text{ή } t_1 = 10 \text{ s.}$$

Από τη σχέση (2) για $t_1 = 10$ s προκύπτει: $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$.

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \quad \text{ή } \omega_1 = 16 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο $\alpha_{\kappa(B)}$ της κεντρομόλου επιτάχυνσης του υλικού σημείου B τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\kappa(B)} = \omega_1^2 R$ ή $\alpha_{\kappa(B)} = 128 \text{ m/s}^2$.

γ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του υλικού σημείου Z είναι $\alpha_{\kappa(Z)} = 40 \text{ m/s}^2$. Είναι:

$$\alpha_{\kappa(Z)} = \omega_2^2 r \quad \text{ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{\kappa(Z)}}{r}} \quad \text{ή } \omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_Z το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι:

$$v_Z = \omega_2 r \quad \text{ή } v_Z = 4 \text{ m/s.}$$

δ. Η χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega_2 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_3$ ή $t_3 = \frac{\omega_0 - \omega_2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $t_3 = 5 \text{ s}$.

Έστω $\Delta\theta'$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 ($\Delta t = t_3 - t_2$). Είναι:

$$\Delta\theta' = \omega_1 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2 \quad \text{ή } \Delta\theta' = 39 \text{ rad.}$$

Το μήκος του τόξου που διανύει το υλικό σημείο Z από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s = r\Delta\theta' \quad \text{ή } s = 15,6 \text{ m.}$$

48. α. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής της τροχαλίας από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = N2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 100 \text{ rad.}$$

Επειδή η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, ισχύουν:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2 \quad \text{και} \quad \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1 \quad (2).$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτουν:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \text{ rad/s}^2 \quad \text{και} \quad t_1 = 10 \text{ s.}$$

β. Έστω v_A το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Α του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 και v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του ανώτερου σημείου της τροχαλίας την ίδια χρονική στιγμή. Είναι: $v_A = v$ ή $v_A = \omega_1 R$ ή $v_A = 4 \text{ m/s}$.

$$\gamma. \alpha_A = \alpha_{\epsilon} \quad \text{ή} \quad \alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad \text{ή} \quad \alpha_A = 0,4 \text{ m/s}^2.$$

δ. Η μετατόπιση του άκρου Α του νήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2}\alpha_A t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_A = 20 \text{ m.}$$

Το μήκος ℓ του νήματος που ξετυλίγεται από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο: $\ell = R\Delta\theta$ ή $\ell = 20 \text{ m}$.

ε. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 2 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\alpha_{\kappa(Z)}$ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Ζ τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\alpha_{\kappa(Z)} = \omega_2^2 R$ ή $\alpha_{\kappa(Z)} = 0,8 \text{ m/s}^2$. Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου Ζ

είναι $\alpha_{\epsilon(Z)} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{\epsilon(Z)} = 0,4 \text{ m/s}^2$. Το μέτρο α_Z της επιτάχυνσης του σημείου Ζ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_Z = \sqrt{\alpha_{\kappa(Z)}^2 + \alpha_{\epsilon(Z)}^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_Z = \sqrt{0,8} \text{ m/s}^2.$$

49. α. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία ακινητοποιείται. Έχουμε:

$$N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = N2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 20 \text{ rad.}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = t_1$ και $\omega = 0$ προκύπτει: $0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (2).

Η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} (t_1)^2$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_1 = \omega_0 (t_1 - 0) - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} (t_1 - 0)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (2):}$$

$$\Delta\theta_1 = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta_1}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2,5 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από τη σχέση (2) για $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2,5 \text{ rad/s}^2$ προκύπτει: $t_1 = 4 \text{ s}$.

$$\gamma. \text{ Έχουμε: } \Delta\theta = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} (t_2)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = \omega_0 (t_2 - 0) - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} (t_2 - 0)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2$$

$$\text{ή} \quad 15 = 10t_2 - 1,25t_2^2 \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή} \quad 1,25t_2^2 - 10t_2 + 15 = 0 \quad (\text{S.I.}) \quad (3).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι: $t_2 = 2 \text{ s}$

ή $t_2 = 6 \text{ s}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή t_2 ο τροχός δεν έχει ακινητοποιηθεί, δεκτή λύση είναι η: $t_2 = 2 \text{ s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/s}.$$

δ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\kappa} = \frac{(\omega_1 R)^2}{R} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\kappa} = \omega_1^2 R$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\kappa} = 12,5 \text{ m/s}^2.$$

50. α. Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού σώματος παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{20-5}{3-0} \text{ rad/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

β. $N = (30/\pi)$ περιστροφές.

γ. $\Delta\theta = 12,5 \text{ rad}$.

δ. Από το διάγραμμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_3 είναι $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Ο ζητούμενος λόγος είναι: $\frac{\alpha_{\epsilon}}{\alpha_{\kappa}} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu} r_A}{\omega^2 r_A}$

$$\text{ή} \quad \frac{\alpha_{\epsilon}}{\alpha_{\kappa}} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu}}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\epsilon}}{\alpha_{\kappa}} = \frac{1}{80}.$$

51. α. Επειδή ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής του ταχύτητας

είναι σταθερό. Επομένως, είναι: $\left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right|$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{\omega_{\text{τελ}} - \omega_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} \right| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{(0-20) \text{ rad/s}}{(5-0) \text{ s}} \right|$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = 4 \text{ rad/s}^2.$$

β. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου. Το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής του ταχύτητας. Δηλαδή, είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$$

$$\text{ή} \quad \omega_1 = 12 \text{ rad/s}.$$

γ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\Delta\theta = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 50 \text{ rad}.$$

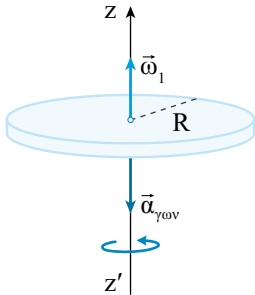
Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (25/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

δ. Το μέτρο της επιτροχιακής επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

$$\text{ή} \quad a_{\epsilon} = 2 \text{ m/s}^2.$$

52. α. Επειδή η στροφοκική κίνηση που εκτελεί ο δίσκος είναι ομαλά επιβραδυνόμενη, το διάνυσμα της γωνιακής του επιβράδυνσης $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ τη χρονική στιγμή t_1 έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}_1$ την ίδια χρονική στιγμή.



Επειδή ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, το μέτρο της γωνιακής του επιβράδυνσης ($a_{\gamma\omega\nu}$) είναι σταθερό. Έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu} = \frac{|(0 - 20) \text{ rad/s}|}{(5 - 0) \text{ s}}$$

$$\text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega_1 = \omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} \Delta t$ ή $\omega_1 = \omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$.

γ. Έστω α_k το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου B της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\alpha_k = \omega_1^2 R \quad \text{ή} \quad \alpha_k = 32 \text{ m/s}^2.$$

Έστω α_e το μέτρο της επιτροχιακής επιτάχυνσης του σημείου B. Έχουμε: $\alpha_e = a_{\gamma\omega\nu} R$

$$\text{ή} \quad \alpha_e = 2 \text{ m/s}^2.$$

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ του υλικού σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a} = \vec{a}_k + \vec{a}_e.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}_k$ και $\vec{a}_e$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha = \sqrt{\alpha_e^2 + \alpha_k^2}$ ή $\alpha = \sqrt{1.028} \text{ m/s}^2$.

δ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε: $\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 42 \text{ rad}.$$

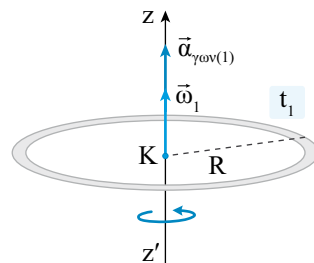
Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή

$$t_2 = 4 \text{ s}. \text{ Έχουμε: } \Delta\theta_2 = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_2 = \omega_0 t_2 - \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 48 \text{ rad}.$$

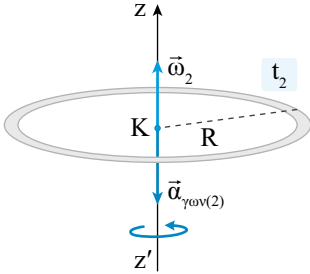
Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου στη χρονική διάρκεια του 4ου δευτερολέπτου της κίνησής του είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_2 - \Delta\theta_1$ ή $\Delta\theta = 6 \text{ rad}$.

53. α. Η στροφοκική κίνηση που εκτελεί ο δακτύλιος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Επομένως, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης του δακτυλίου $\vec{a}_{\gamma\omega\nu(1)}$ τη χρονική στιγμή t_1 έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}_1$ την ίδια χρονική στιγμή.



Η στροφοκική κίνηση που εκτελεί ο δακτύλιος τη χρονική στιγμή t_2 είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Επομένως, το διάνυσμα της γωνιακής

επιτάχυνσης (επιβράδυνσης) του δακτυλίου $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$ τη χρονική στιγμή t_2 έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}_2$ την ίδια χρονική στιγμή.



Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)}$ του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s παραμένει σταθερό.

$$\text{Είναι: } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{16-8}{2-0} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης (επιβράδυνσης) $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$ του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 10$ s παραμένει σταθερό. Είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{|0-16|}{10-2} \text{ rad/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\omega_0 = 8 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δακτυλίου στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s. Είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 24 \text{ rad}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s είναι $\omega' = 16 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δακτυλίου στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή $t' = 2$ s έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 10$ s. Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega' \Delta t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (\Delta t_2)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 64 \text{ rad}.$$

Επομένως, η γωνία στροφής του δακτυλίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 88 \text{ rad}$.

γ. Το μέτρο ω_2 της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega_2 = \omega' - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t'$
ή $\omega_2 = \omega' - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t')$ ή $\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$.

Έστω v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$v = \omega_2 R \quad \text{ή} \quad v = 2,4 \text{ m/s}.$$

δ. Έστω ω_3 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δακτυλίου είναι: $\alpha_k = 20 \text{ m/s}^2$. Έχουμε: $\alpha_k = \omega_3^2 R$

$$\text{ή } \omega_3 = 10 \text{ rad/s}.$$

Έστω t_4 ($0 < t_4 < t'$) η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου γίνεται για πρώτη φορά ίσο με ω_3 .

$$\text{Έχουμε: } \omega_3 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (t_4 - 0)$$

$$\text{ή } \omega_3 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_4 \quad \text{ή} \quad t_4 = \frac{\omega_3 - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}$$

$$\text{ή } t_4 = 0,5 \text{ s}.$$

Έστω t_5 ($t' < t_5 < t_3$) η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου γίνεται για δεύτερη φορά ίσο με ω_3 .

$$\text{Έχουμε: } \omega_3 = \omega' - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_5 - t')$$

$$\text{ή } t_5 = t' + \frac{\omega' - \omega_3}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad t_5 = 5 \text{ s}.$$

54. α. Έστω ω_1 και ω_2 τα μέτρα της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα. Είναι: $v_A = \omega_1 x$

$$\text{ή } \omega_1 = 16 \text{ rad/s και}$$

$$v_B = \omega_2 (L - x) \text{ ή } \omega_2 = 20 \text{ rad/s.}$$

β. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου. Είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \text{ ή } t_2 - t_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (1).$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ της ράβδου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \text{ ή } \Delta\theta = N2\pi \text{ ή } \Delta\theta = 40 \text{ rad.}$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta\theta = \omega_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (t_2 - t_1)^2$$

ή, λόγω της σχέσης (1):

$$\Delta\theta = \frac{\omega_1 (\omega_2 - \omega_1)}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} + \frac{1}{2} \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 1,8 \text{ rad/s}^2.$$

γ. Είναι: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_0 = 7 \text{ rad/s.}$

$$\text{δ. Είναι: } \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{\omega_2^2 r_A}{\omega_2^2 r_B} \text{ ή } \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{x}{L - x}$$

$$\text{ή } \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{1}{3}.$$

55. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του στερεού σώματος. Είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{d\omega}{dt}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 6 \text{ rad/s}^2$. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .

Στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης ισχύει: $\omega = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1)$

$$\text{ή } 0 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1) \text{ ή } \omega_1 = 30 \text{ rad/s.}$$

β. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$\Delta\theta_2 = \omega_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = 75 \text{ rad.}$$

$$\text{Συνεπώς, είναι: } N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\text{ή } N = (37,5/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

γ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = N2\pi \text{ ή } \Delta\theta_1 = 60 \text{ rad.}$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2 \quad (1)$$

$$\text{και } \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1 \quad (2).$$

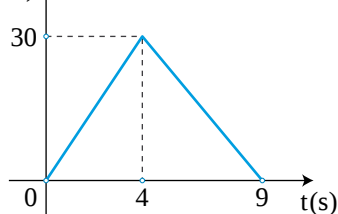
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{\Delta\theta_1}{\omega_1} = \frac{t_1}{2} \text{ ή } t_1 = 4 \text{ s.}$$

Συνεπώς από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 7,5 \text{ rad/s}^2.$$

δ. $\omega(\text{rad/s})$



56. α. Έστω ω_0 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Είναι: $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$ ή $\omega_1 = 40 \text{ rad/s}$.

β. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1

είναι: $\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2$ ή $\Delta\theta_1 = 150 \text{ rad}$.

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$

ή $N_1 = (75/\pi)$ περιστροφές.

γ. Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $N_2 = N - N_1$

ή $N_2 = (20/\pi)$ περιστροφές.

Επομένως, η γωνία στροφής του δίσκου $\Delta\theta_2$ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\Delta\theta_2 = N_2 2\pi$ ή $\Delta\theta_2 = 40 \text{ rad}$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου. Επειδή ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται ισχύουν:

$$\omega = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1) \quad \text{ή}$$

$$0 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1) \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \Delta\theta_2 = \omega_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1)^2$$

ή, λόγω της σχέσης (1):

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου είναι:

$$\alpha_k = 360 \text{ m/s}^2. \text{ Έχουμε: } \alpha_k = \omega_2^2 R$$

$$\text{ή} \quad \omega_2 = 30 \text{ rad/s}.$$

Έστω t_3 ($0 < t_3 < t_1$) η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου γίνεται για πρώτη φορά ίσο με ω_2 .

Έχουμε: $\omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (t_3 - 0)$

$$\text{ή} \quad \omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_3 \quad \text{ή} \quad t_3 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}$$

$$\text{ή} \quad t_3 = 2,5 \text{ s}.$$

Έστω t_4 ($t_1 < t_4 < t_2$) η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου γίνεται για δεύτερη φορά ίσο με ω_2 .

Έχουμε: $\omega_2 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_4 - t_1)$

$$\text{ή} \quad t_4 = t_1 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad t_4 = 5,5 \text{ s}.$$

57. α. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}$ η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου. Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 1 \text{ rad/s}^2$.

β. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής της ράβδου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 200 \text{ rad}.$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί η ράβδος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = (100/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

γ. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής της ράβδου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\Delta\theta_2 = N_2 2\pi$ ή $\Delta\theta_2 = 100 \text{ rad}$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης της ράβδου. Επειδή η κίνηση της ράβδου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται ($\omega = 0$) είναι ομαλά επιβραδυνόμενη, ισχύουν:

$$\omega = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1)$$

$$\text{ή } 0 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_2 - t_1)$$

$$\text{ή } t_2 - t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad (1)$$

$$\text{και } \Delta\theta_2 = \omega_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(t_2 - t_1)^2$$

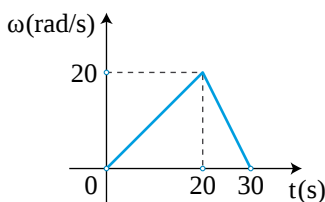
ή, λόγω της σχέσης (1):

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\omega_1^2}{2\Delta\theta_2}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $t_2 = 30 \text{ s}$.

δ.



ε. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή $t_3 = 25 \text{ s}$. Είναι: $\omega_2 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (t_3 - t_1)$ ή $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$.

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v_1 του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_1 = \omega_2 d$ ή $v_1 = 10 \text{ m/s}$.

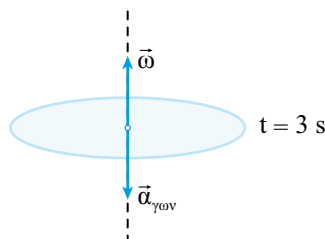
Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v_2 του σώματος Σ_2 την ίδια χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση: $v_2 = \omega_2 (L - d)$ ή $v_2 = 30 \text{ m/s}$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ή $K_1 = 100 \text{ J}$, ενώ η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 την

ίδια χρονική στιγμή είναι: $K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

ή $K_2 = 450 \text{ J}$.

58. α.



β. Η γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ παραμένει σταθερή. Είναι:

$$|\alpha_{\gamma\omega\nu}| = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{|0 - 20|}{6 - 2} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

γ. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$. Είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 40 \text{ rad}.$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$. Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_0 \Delta t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t_2)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 40 \text{ rad}.$$

Η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 80 \text{ rad}$.

δ. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 4$ s. Έχουμε:
 $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t$ ή $\omega = [20 - 5(4 - 2)] \text{ rad/s}$
 ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 4$ s υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{\kappa} = \omega^2 R$ ή $a_{\kappa} = 40 \text{ m/s}^2$.

59. α. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 5$ s το στερεό σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφοτική κίνηση. Από τη χρονική $t = 5$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 15$ s το στερεό σώμα εκτελεί ομαλή στροφοτική κίνηση. Από τη χρονική στιγμή $t = 15$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 20$ s το στερεό σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφοτική κίνηση.

β. Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού σώματος στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 5$ s είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
 ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{20 - 5}{5} \text{ rad/s}^2$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = +3 \text{ rad/s}^2$.

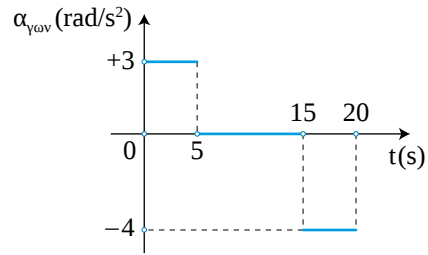
Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού στο χρονικό διάστημα από $t = 5$ s έως $t = 15$ s είναι: $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 0$.

Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού στο χρονικό διάστημα από $t = 15$ s έως $t = 20$ s είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{0 - 20}{5} \text{ rad/s}^2$$

ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = -4 \text{ rad/s}^2$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



γ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Delta t \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$$

ή $\omega_1 = 14 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική t_1 έως τη χρονική στιγμή $t = 5$ s. Είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 34 \text{ rad}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 5$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 15$ s, είναι σταθερό και ίσο με $\omega_2 = 20 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική $t = 5$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 15$ s. Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_2 \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 200 \text{ rad}.$$

Έστω $\Delta\theta_3$ η γωνία στροφής του στερεού σώματος στο χρονικό διάστημα Δt_3 , από τη χρονική $t = 15$ s έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\Delta\theta_3 = \omega_2 \Delta t_3 - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}| (\Delta t_3)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_3 = 18 \text{ rad}.$$

Επομένως, η γωνία στροφής του στερεού σώματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 252 \text{ rad}.$$

δ. Έστω ω_3 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος τη χρονική στιγμή t_3 .

$$\text{Έχουμε: } \omega_3 = \omega_2 - |\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}| \Delta t'$$

$$\text{ή } \omega_3 = [20 - 4(17 - 15)] \text{ rad/s}$$

$$\text{ή } \omega_3 = 12 \text{ rad/s.}$$

Έστω v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός υλικού σημείου Α του στερεού τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι: $v = \omega_3 r$ ή $v = 3,6 \text{ m/s}$.

60. α. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση της οποίας η αλγεβρική τιμή είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = +4 \text{ rad/s}^2$.

Από τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Από τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ ο δίσκος εκτελεί ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση της οποίας η αλγεβρική τιμή είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = -2 \text{ rad/s}^2$.

Έστω ω_1 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$. Είναι: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Delta t$

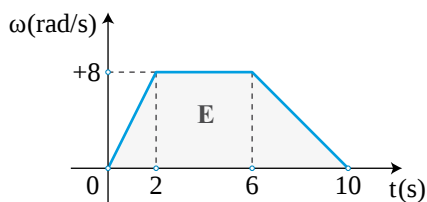
$$\text{ή } \omega_1 = 0 + 4(2 - 0) \text{ rad/s} \quad \text{ή } \omega_1 = 8 \text{ rad/s.}$$

Από τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου παραμένει σταθερή και ίση με ω_1 .

Έστω ω_2 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$. Είναι: $\omega_2 = \omega_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t'$

$$\text{ή } \omega_2 = [8 - 2(10 - 6)] \text{ rad/s} \quad \text{ή } \omega_2 = 0.$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο.



β. Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ είναι αριθμητικά ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν E του τραapeζίου που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$\text{Είναι: } \Delta\theta = \left(\frac{10 + 4}{2} \cdot 8 \right) \text{ rad} \quad \text{ή } \Delta\theta = 56 \text{ rad.}$$

γ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$. Είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (\Delta t_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή } \Delta\theta_1 = 8 \text{ rad.}$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_2 από τη χρονική $t = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$. Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_1 \Delta t_2 \quad \text{ή } \Delta\theta_2 = 16 \text{ rad.}$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta'$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ είναι: $\Delta\theta' = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta' = 24 \text{ rad}$.

Το μήκος του τόξου που διαγράφει ένα υλικό σημείο της περιφέρειας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $s = R\Delta\theta$

$$\text{ή } s = 19,2 \text{ m.}$$

δ. Έστω ω_3 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 8$ s.

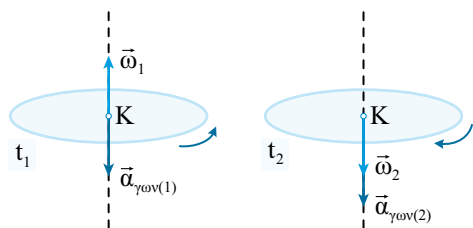
Είναι: $\omega_3 = \omega_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t_3$

ή $\omega_3 = [8 - 2(8 - 6)] \text{ rad/s}$ ή $\omega_3 = 4 \text{ rad/s}$.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$\alpha_k = \omega_3^2 R$ ή $\alpha_k = 12,8 \text{ m/s}^2$.

61. α.



β. Επειδή, όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα, η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, η γωνιακή του επιτάχυνση παραμένει σταθερή.

Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 είναι η ίδια. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Έχουμε: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{-10 - 20}{6 - 0} \text{ rad/s}^2$

ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = -5 \text{ rad/s}^2$ ή $|\alpha_{\gamma\omega\nu}| = 5 \text{ rad/s}^2$.

γ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\omega_0 = +20 \text{ rad/s}$.

Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τη σχέση: $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ (1).

Από τη σχέση (1) για $\omega = 0$ και $t = t_2$, προκύπτει:

$0 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $t_2 = -\frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$

ή $t_2 = 4 \text{ s}$.

δ. Η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 , υπολογίζεται από τη σχέση:

$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t_1)^2$

ή $\Delta\theta_1 = +40 \text{ rad}$.

Η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή $t = 6$ s, υπολογίζεται από τη σχέση:

$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t_2)^2$ ή $\Delta\theta_2 = -10 \text{ rad}$.

Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6$ s είναι: $\Delta\theta = |\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2|$ ή $\Delta\theta = 50 \text{ rad}$.

Επομένως, το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6$ s είναι: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = (25/\pi)$ περιστροφές.

62. α. Επειδή, όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα, η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, η γωνιακή του επιτάχυνση παραμένει σταθερή. Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου τις χρονικές στιγμές $t = 2$ s και $t = 6$ s είναι η ίδια. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Είναι:

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{20 - (-20)}{8 - 0} \text{ rad/s}^2$

ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2$.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\omega_0 = -20 \text{ rad/s}$.

Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τη σχέση: $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ (1).

Από τη σχέση (1) για $\omega = 0$ και $t = t_1$ προκύπτει: $0 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $t_1 = 4 \text{ s}$.

γ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = -40 \text{ rad.}$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$. Έχουμε: $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t_2)^2$ ή $\Delta\theta_2 = +40 \text{ rad}$.

Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$ είναι: $\Delta\theta = |\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2|$ ή $\Delta\theta = 80 \text{ rad}$.

Επομένως, το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$ είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (40/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

δ. Έστω ω η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας του δίσκου είναι $a_k = 40 \text{ m/s}^2$. Έχουμε: $a_k = \omega^2 R$ ή $\omega = \pm 10 \text{ rad/s}$.

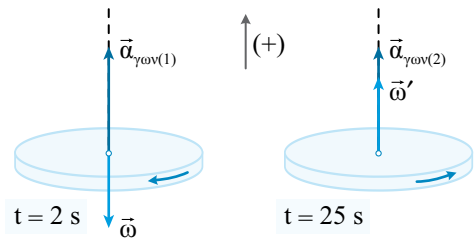
Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία είναι $\omega = -10 \text{ rad/s}$.

Από τη σχέση (1) για $\omega = -10 \text{ rad/s}$ και $t = t_2$, προκύπτει: $t_2 = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $t_2 = 2 \text{ s}$.

Έστω t_3 η χρονική στιγμή στην οποία είναι $\omega = +10 \text{ rad/s}$.

Από τη σχέση (1) για $\omega = +10 \text{ rad/s}$ και $t = t_3$ προκύπτει: $t_3 = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $t_3 = 6 \text{ s}$.

63. α. Στα παρακάτω σχήματα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου τις χρονικές στιγμές $t = 2 \text{ s}$ και $t = 25 \text{ s}$.



β. Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ παραμένει σταθερή. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

$$\text{Είναι: } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{0 - (-10)}{5 - 0} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20 \text{ s}$.

Σύμφωνα με το δοθέν διάγραμμα ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση ($\bar{\omega} = \text{σταθ.}$), οπότε $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 0$.

Έστω ω_1 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 10$ s.

$$\text{Είναι: } \omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t$$

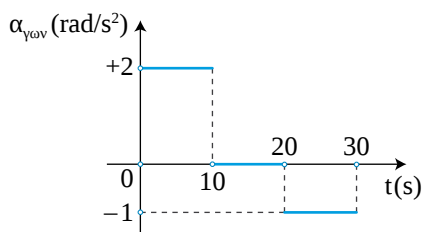
$$\text{ή } \omega_1 = (-10 + 2 \cdot 10) \text{ rad/s} \text{ ή } \omega_1 = +10 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 20$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 30$ s. Είναι:

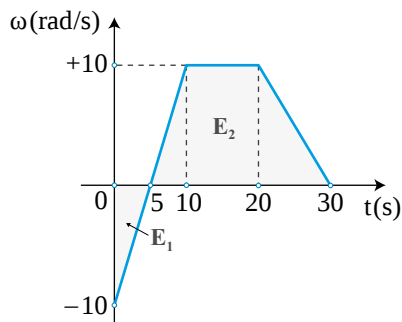
$$\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{0 - 10}{30 - 20} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = -1 \text{ rad/s}^2.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 30$ s.



γ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 5$ s. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ ισούται αριθμητικά με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν E_1 του τριγώνου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$$\text{Είναι: } \Delta\theta_1 = E_1 \text{ ή } \Delta\theta_1 = \frac{5 \cdot 10}{2} \text{ rad}$$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = 25 \text{ rad.}$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 10$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 30$ s. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_2$ ισούται αριθμητικά με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν E_2 του τραπεζίου που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$\text{Είναι: } \Delta\theta_2 = \left(\frac{10 + 25}{2} \cdot 10 \right) \text{ rad}$$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = 175 \text{ rad.}$$

Συνεπώς, η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 30$ s είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 200 \text{ rad.}$

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 30$ s είναι $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

$$\text{ή } N = (100/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

δ. Έστω ω_2 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 3$ s.

$$\text{Είναι: } \omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t$$

$$\text{ή } \omega_2 = (-10 + 2 \cdot 3) \text{ rad/s} \text{ ή } \omega_2 = -4 \text{ rad/s.}$$

Έστω F_κ το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο A τη χρονική στιγμή $t = 3$ s. Είναι: $F_\kappa = m a_\kappa$ ή $F_\kappa = m \omega_2^2 R$ ή $F_\kappa = 16 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$

ε. Έστω ω_3 η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 25$ s.

$$\text{Είναι: } \omega_3 = \omega_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} \Delta t \text{ ή}$$

$$\omega_3 = [10 - 1(25 - 20)] \text{ rad/s} \text{ ή } \omega_3 = 5 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο v_A της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου A τη χρονική στιγμή $t = 25$ s είναι: $v_A = \omega_3 R$ ή $v_A = 5 \text{ m/s.}$ Η κινητική

ενέργεια του υλικού σημείου Α τη χρονική στιγμή $t = 25 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{ή} \quad K_A = 125 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

2.2 Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων:

Σύνθετη κίνηση στερεού σώματος

ΘΕΜΑΤΑ Α

Α. Θέματα πολλαπλής επιλογής

8. γ	9. δ	10. β	11. α	12. γ
13. α	14. β	15. β	16. α	17. α
18. β	19. β	20. α	21. δ	

Β. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

22.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ	στ. Σ
23.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ	
24.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ	
25.	α. Λ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ	

26. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου του τροχού τη χρονική στιγμή t και v_2 το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού που απέχει απόσταση $d = R$ από το οριζόντιο δάπεδο την ίδια χρονική στιγμή. Επειδή ο τροχός κυλίνει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_1 = 2v_{cm} \quad (1) \quad \text{και} \quad v_2 = \sqrt{2}v_{cm} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2v_{cm}}{\sqrt{2}v_{cm}} \quad \text{ή} \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2}.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Επειδή ο δίσκος κυλίνει χωρίς να ολισθαίνει, το μέτρο v_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_{cm} = \omega R \quad (1).$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο B έχει λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ και λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$.

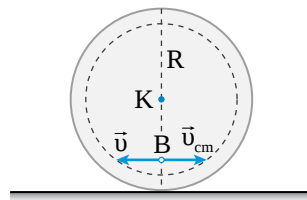
Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B δίνεται από τη σχέση $v = \omega r$ (2).

Η ταχύτητα $\vec{v}_B$ του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ ή, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά:

$$v_B = v_{cm} - v \quad \text{ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):}$$

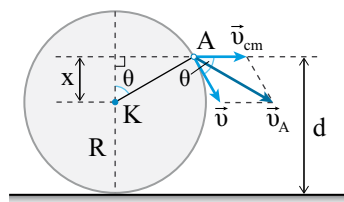
$$v_B = \omega R - \omega r \quad \text{ή, για } r = R - d = R - \frac{2R}{3} = \frac{2R}{3},$$

$$v_B = \omega \left(R - \frac{2R}{3} \right) \quad \text{ή} \quad v_B = \frac{1}{3} \omega R.$$



28. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το σημείο A τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου. Η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$.



Επειδή στο σημείο A τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ σχηματίζουν γωνία θ , το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm}v\cos\theta}$$

$$\text{ή} \quad v_A = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\cos\theta} \quad (1).$$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$\cos\theta = \frac{x}{R} \quad \text{ή} \quad \cos\theta = \frac{d-R}{R} \quad \text{ή} \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$v_B = \sqrt{3}v_{cm}.$$

29. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του τροχού. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_{cm} = a_{cm} t_1 \quad (1).$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του ανώτατου σημείου του τροχού τη χρονική στιγμή $t_2 = 2t_1$ και v'_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού την ίδια χρονική στιγμή. Ισχύει:

$$v = 2v'_{cm} \quad \text{ή} \quad v = 2a_{cm} t_2 \quad \text{ή} \quad v = 2a_{cm} 2t_1$$

$$\text{ή} \quad v = 4a_{cm} t_1 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1),}$$

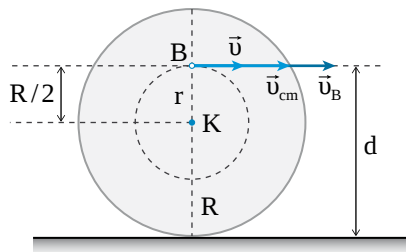
$$v = 4v_{cm}.$$

30. Σωστή επιλογή είναι η α .

Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο B έχει λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ και, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$. Το σημείο B εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r = R/2$ γύρω από το κέντρο K του δίσκου. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v = \omega r$ ή $v = \omega \frac{R}{2}$ (1), όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .

Επειδή ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_{cm} = \omega R$ (2).

Έστω v_B η ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (3).



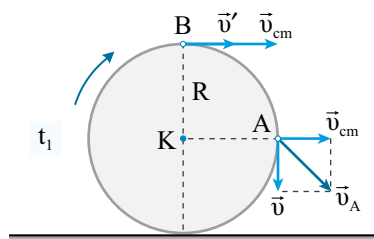
Επειδή στο σημείο B τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_B = v_{cm} + v \quad \text{ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):}$$

$$v_B = \omega R + \omega \frac{R}{2}$$

$$\text{ή} \quad v_B = \frac{3}{2} \omega R \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (2):}$$

$$v_B = \frac{3}{2} v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_{cm} = \frac{2}{3} v_B.$$

31. Α. Σωστή επιλογή είναι η β .

Έστω v_A η ταχύτητα του σημείου A της περιφέρειας του τροχού που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ όπου $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου A την ίδια χρονική στιγμή λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας v_A είναι:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} v_{cm} = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{5}{4} v_{cm}^2 = v_{cm}^2 + v^2 \quad \text{ή} \quad v = \frac{v_{cm}}{2} \quad \text{ή} \quad v_{cm} = 2v$$

$$\text{ή} \quad v_{cm} = 2\omega R \quad (1).$$

Συνεπώς, αφού είναι: $v_{cm} \neq \omega R$, ο τροχός κυλίεται ολισθαίνοντας.

B. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω $\vec{v}_B$ η ταχύτητα του ανώτατου σημείου B του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$ (2), όπου $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού και $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B την ίδια χρονική στιγμή λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού. Είναι: $v' = \omega R$ ή, λόγω της σχέσης (1): $v' = \frac{v_{cm}}{2}$ (3).

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ στο σημείο B έχουν την ίδια φορά, η σχέση (2) γράφεται: $v_B = v_{cm} + v'$ ή, λόγω της σχέσης (3):

$$v_B = \frac{3}{2} v_{cm}.$$

32. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

$$\text{Ισχύει: } N_A = \frac{\Delta\theta_A}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_A = \frac{s_A}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad N_A = \frac{s_A}{2\pi R_A} \quad \text{ή} \quad N_A = \frac{v_{cm} \Delta t}{2\pi R} \quad (1).$$

$$\text{Ισχύει επίσης: } N_B = \frac{\Delta\theta_B}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_B = \frac{s_B}{2\pi R_B}$$

$$\text{ή} \quad N_B = \frac{s_B}{2\pi R_B} \quad \text{ή} \quad N_B = \frac{v_{cm} \Delta t}{2\pi 2R}$$

$$\text{ή} \quad N_B = \frac{v_{cm} \Delta t}{4\pi R} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$N_A = 2N_B.$$

33. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

$$\text{Ισχύει: } s = R\Delta\theta \quad \text{ή} \quad s = 20 \text{ m}.$$

34. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A, λόγω της στροφικής κίνησης που εκτελεί ο δίσκος, ισούται με το μέτρο v της γραμμικής του ταχύτητας. Συνεπώς ισχύει: $v = \omega r$ ή $v = \frac{v_{cm}}{R} r$.

35. A. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η ταχύτητα $\vec{v}_\Sigma$ ενός σημείου Σ του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τη συνισταμένη της ταχύτητας $\vec{v}_{cm}$ που έχει, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ που έχει, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου. Δηλαδή, είναι:

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{cm} + \vec{v} \quad (1).$$

Αν το σημείο Σ έχει την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας του δίσκου ($\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{cm}$), τότε από τη σχέση (1) προκύπτει: $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$ ή $v = 0$.

που είναι άτοπο, γιατί όλα τα σημεία του δίσκου (εκτός από το κέντρο μάζας του) έχουν τη χρονική στιγμή t_1 γραμμικές ταχύτητες των οποίων τα μέτρα είναι ανάλογα των αποστάσεών τους από το κέντρο μάζας του δίσκου ($v = \omega r$).

B. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

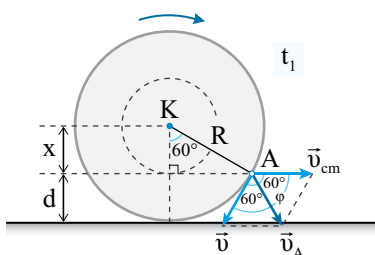
Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο A έχει ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της

στροφικής κίνησης του δίσκου, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Έστω $\vec{v}_A$ η ταχύτητα του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}.$$

Έστω φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ στο σημείο A τη χρονική στιγμή t_1 . Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_A$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm}v\cos\varphi} \quad (1).$$



Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, για τα σημεία της περιφέρειάς του ισχύει ότι: $v_{cm} = v$ (2). Επειδή, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι $v_A = v_{cm}$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$v_{cm} = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm}v\cos\varphi}$$

$$\text{ή } v_{cm}^2 = v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm}v\cos\varphi,$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (2): } v_{cm}^2 = 2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\cos\varphi$$

$$\text{ή } \cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \text{ή } \varphi = 120^\circ.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ στο σημείο A είναι ίσα, το διάνυσμα $\vec{v}_A$ διχοτομεί τη γωνία φ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$. Από το σχήμα προκύπτει:

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{R} \quad \text{ή } x = \frac{R}{2}.$$

Συνεπώς, η απόσταση του σημείου A από το οριζόντιο δάπεδο είναι: $d = R - x$ ή $d = \frac{R}{2}$.

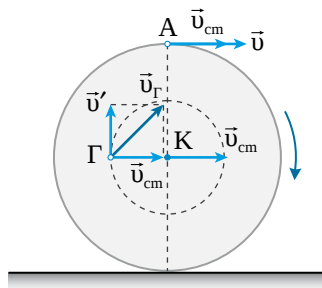
36. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω $\vec{v}_A$ η ταχύτητα του ανώτατου σημείου του τροχού. Η ταχύτητα του σημείου A δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (1), όπου $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου A. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (1) γίνεται:

$$v_A = v_{cm} + v \quad \text{ή } v_A = v_{cm} + \omega R.$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $v_{cm} = \omega R$ (2).

Συνεπώς από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $v_A = 2\omega R$ (3).



Έστω $\vec{v}_\Gamma$ η ταχύτητα του σημείου Γ του τροχού. Είναι: $\vec{v}_\Gamma = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$, όπου $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Γ.

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Γ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + (v')^2} \quad \text{ή } v_\Gamma = \sqrt{(\omega R)^2 + \left(\omega \frac{R}{2}\right)^2}$$

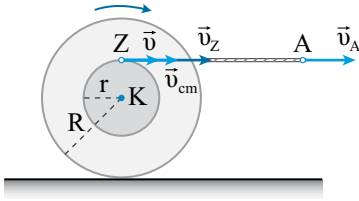
$$\text{ή } v_\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega R \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και

$$(3) \text{ προκύπτει: } \frac{v_\Gamma}{v_A} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

37. Α. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω $\vec{v}_A$ η ταχύτητα του άκρου Α του νήματος μια τυχαία χρονική στιγμή t και $\vec{v}_Z$ η ταχύτητα του σημείου επαφής Ζ του νήματος με την κυκλική εγκοπή την ίδια χρονική στιγμή.



Είναι: $\vec{v}_Z = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (1), όπου $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του σημείου Ζ, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου τη χρονική στιγμή t , και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Ζ, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου την ίδια χρονική στιγμή. Από τη σχέση (1) έχουμε: $v_Z = v_{cm} + v$ ή $v_Z = v_{cm} + \omega r$ ή $v_Z = v_{cm} + \omega \frac{R}{2}$ (2).

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{cm} = \omega R$ (3). Η σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), γράφεται: $v_Z = \omega R + \omega \frac{R}{2}$ ή $v_Z = \frac{3}{2} \omega R$ ή, λόγω της σχέσης (3): $v_Z = \frac{3}{2} v_{cm}$ (4).

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, ισχύει: $\vec{v}_A = \vec{v}_Z$ ή $v_A = v_Z$ ή, λόγω της σχέσης (4): $v_A = \frac{3}{2} v_{cm}$ ή, παραγωγίζοντας:

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{3}{2} \frac{dv_{cm}}{dt} \quad \text{ή} \quad a_A = \frac{3}{2} a_{cm}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Είναι: $s = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \Delta t^2$ (5). Έστω $\alpha_{γων}$ το μέτρο

της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$ ή $\alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}$. Το μήκος ℓ του νήματος που ξετυλίγεται από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής σε χρονικό διάστημα Δt υπολογίζεται από τη σχέση: $\ell = r \Delta \theta$

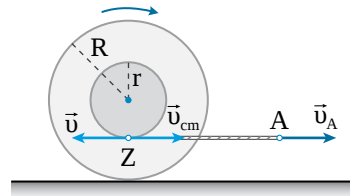
$$\text{ή} \quad \ell = \frac{R}{2} \frac{1}{2} \alpha_{γων} \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \ell = \frac{1}{4} R \frac{\alpha_{cm}}{R} \Delta t^2$$

$$\text{ή} \quad \ell = \frac{1}{4} \alpha_{cm} \Delta t^2 \quad (6).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και (5) προκύπτει: $\frac{\ell}{s} = \frac{1}{2}$ ή $\ell = \frac{s}{2}$.

38. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $v_{cm} = \omega R$.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, ισχύει: $\vec{v}_A = \vec{v}_Z$ ή $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$

$$\text{ή} \quad v_A = v_{cm} - v \quad \text{ή} \quad v_A = \omega R - \omega r$$

$$\text{ή} \quad v_A = \omega R - \omega \frac{R}{2} \quad \text{ή} \quad v_A = \frac{1}{2} \omega R \quad \text{ή} \quad \omega = 2 \frac{v_A}{R}.$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Έστω $\alpha_{γων}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Είναι: $\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$ ή $\alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}$.

Το μήκος ℓ του νήματος που έχει τυλιχθεί

στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell = \ell_1 - \ell_2$ ή $\ell = 2d$.

Το μήκος ℓ του νήματος που έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\ell = r\Delta\theta$ ή

$$\ell = \frac{R}{2} \Delta\theta \quad (1), \text{ όπου } \Delta\theta \text{ η γωνία στροφής του}$$

δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2$ ή

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Delta t^2 \quad (2). \text{ Από τη σχέση (1), λόγω}$$

της σχέσης (2), προκύπτει: $\ell = \frac{1}{4} \alpha_{\text{cm}} \Delta t^2$

$$\text{ή, επειδή } \ell = 2d, \quad 2d = \frac{1}{4} \alpha_{\text{cm}} \Delta t^2 \quad (3).$$

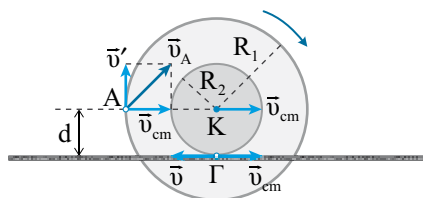
Το διάστημα s_{cm} που διανύει το κέντρο μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} \Delta t^2 \quad (4). \text{ Με διαίρεση κατά μέλη}$$

των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{2d}{s_{\text{cm}}} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad s_{\text{cm}} = 4d.$$

39. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.



Το σημείο επαφής Γ του κυλίνδρου με τη σανίδα τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα $\vec{v}_{\text{cm}}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του καρουλιού, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του καρουλιού. Έστω $\vec{v}_{\Gamma}$

η ταχύτητα του σημείου Γ . Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στη σανίδα, ισχύει: $\vec{v}_{\Gamma} = \vec{0}$ ή $\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v} = \vec{0}$ ή $\vec{v}_{\text{cm}} - \vec{v} = \vec{0}$

$$\text{ή } v_{\text{cm}} = v \text{ ή } v_{\text{cm}} = \omega R_2 \text{ ή } v_{\text{cm}} = \omega R.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο A έχει ταχύτητα $\vec{v}_{\text{cm}}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του καρουλιού, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}'$, λόγω της στροφικής κίνησης του καρουλιού. Έστω $\vec{v}_A$ η ταχύτητα του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}'$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{\text{cm}}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A υπολογίζεται από τη σχέση: $v_A = \sqrt{v_{\text{cm}}^2 + (v')^2}$

$$\text{ή } v_A = \sqrt{(\omega R)^2 + (\omega R_2)^2} \text{ ή } v_A = \sqrt{5} \omega R.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε χρόνο Δt δίνεται από τη σχέση:

$$s = v_{\text{cm}} \Delta t \text{ ή } s = \omega R \Delta t \quad (1). \text{ Το μήκος του τόξου}$$

που διανύει το σημείο A σε χρόνο Δt δίνεται από τη σχέση: $s_A = R_1 \Delta\theta$ ή $s_A = 2R \omega \Delta t \quad (2).$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$s_A = 2s.$$

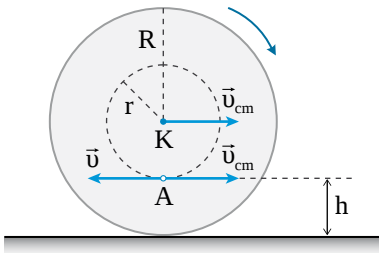
40. Σωστή επιλογή η **γ**.

Επειδή ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με το κέντρο μάζας του να κινείται με σταθερή ταχύτητα, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του είναι ίση με μηδέν ($\alpha_{\text{cm}} = 0$). Η επιτόχια επιτάχυνση του σημείου A είναι $\alpha_e = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_e = \alpha_{\text{cm}}$ ή $\alpha_e = 0$. Συνεπώς, η επιτάχυνση του σημείου A είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνσή του. Επομένως, είναι $\alpha_A = \alpha_{\kappa(A)}$ ή $\alpha_A = \frac{v^2}{R} \quad (1),$ όπου v η γραμμική ταχύτητα του σημείου A . Επειδή ο δίσκος κυλιέται χωρίς να

ολισθαίνει, ισχύει: $v = v_{cm}$, οπότε η σχέση (1) γράφεται: $a_A = \frac{v_{cm}^2}{R}$.

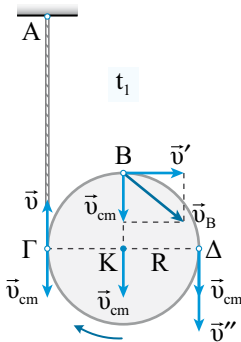
41. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω ότι το σημείο A βρίσκεται σε ύψος $h < R$ όπως φαίνεται στο σχήμα και τη χρονική στιγμή t_1 τη ταχύτητά του, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, είναι $\vec{v}_{cm}$, και η γραμμική του ταχύτητα, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, είναι $\vec{v}$.



Είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ ή $v_A = v_{cm} - v$
 ή $v_A = \omega R - \omega r$ ή $v_A = \omega(R - r)$ (1). Όπως προκύπτει από το σχήμα, είναι: $h = R - r$.
 Επομένως, η σχέση (1) γράφεται: $v_A = \omega h$ (2).
 Δηλαδή, σύμφωνα με τη σχέση (2), η ταχύτητα του σημείου A είναι ανάλογη του ύψους του πάνω από το οριζόντιο δάπεδο.
 Αφού $v_A = 1,5\omega R$, από τη σχέση (2) προκύπτει: $h = 1,5R$.

42. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου, ισχύει:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_A \quad \text{ή} \quad \vec{v}_T = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{cm} + \vec{v} = 0$$

$$\text{ή} \quad v_{cm} - v = 0 \quad \text{ή} \quad v_{cm} = v \quad \text{ή} \quad v_{cm} = \omega R$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \quad \text{ή} \quad a_{cm} = a_{\gamma\omega\omega} R.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Για το σημείο B ισχύει: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$, όπου $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους, είναι: $v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + (v')^2}$

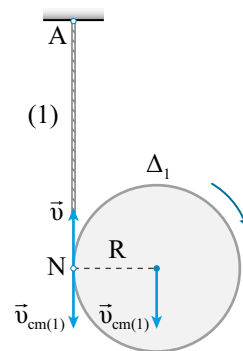
$$\text{ή} \quad v_B = \sqrt{(\omega R)^2 + (\omega R)^2} \quad \text{ή} \quad v_B = \sqrt{2}\omega R$$

$$\text{ή} \quad v_B = \sqrt{2}v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_{cm} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_B \quad (1).$$

Έστω $\vec{v}_\Delta$ η ταχύτητα του σημείου Δ. Είναι: $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}''$ (2), όπου $\vec{v}''$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Δ. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}''$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (2) γράφεται: $v_\Delta = v_{cm} + v''$ ή $v_\Delta = \omega R + \omega R$
 ή $v_\Delta = 2\omega R$ ή $v_\Delta = 2v_{cm}$ ή, λόγω της σχέσης (1): $v_\Delta = \sqrt{2}v_B$.

43. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Για τον δίσκο Δ_1 κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

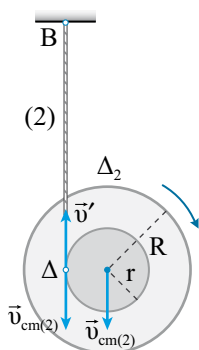


$$\vec{v}_N = \vec{v}_A \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{\text{cm}(1)} + \vec{v} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}(1)} - v = 0$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{cm}(1)} = \omega_1 R \quad \text{ή} \quad \frac{dv_{\text{cm}(1)}}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} R$$

$$\text{ή} \quad a_{\text{cm}(1)} = a_{\gamma\omega\nu(1)} R \quad (1).$$

Για τον δίσκο Δ_2 κάθε χρονική στιγμή ισχύει:



$$\vec{v}_\Delta = \vec{v}_B \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{\text{cm}(2)} + \vec{v}' = \vec{0} \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}(2)} - v' = 0$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{cm}(2)} = \omega_2 r \quad \text{ή} \quad \frac{dv_{\text{cm}(2)}}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r$$

$$\text{ή} \quad a_{\text{cm}(2)} = a_{\gamma\omega\nu(2)} r \quad \text{ή} \quad a_{\text{cm}(2)} = a_{\gamma\omega\nu(2)} \frac{R}{2} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{a_{\text{cm}(1)}}{a_{\text{cm}(2)}} = \frac{2a_{\gamma\omega\nu(1)}}{a_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu(2)} = a_{\gamma\omega\nu(1)} \quad (3).$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

$$\text{Είναι: } N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = \frac{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2}{2\pi} \quad (4) \text{ και}$$

$$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_2 = \frac{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu(2)}t_1^2}{2\pi} \quad (5).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και

$$(5) \text{ προκύπτει: } \frac{N_1}{N_2} = \frac{a_{\gamma\omega\nu(1)}}{a_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή, λόγω της σχέ-}$$

$$\text{σης (3): } \frac{N_1}{N_2} = 1.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

$$\text{Είναι: } \ell_1 = R\Delta\theta_1 \quad (6) \text{ και } \ell_2 = r\Delta\theta_2$$

$$\text{ή } \ell_2 = \frac{R}{2}\Delta\theta_2 \quad (7). \text{ Με διαίρεση κατά μέλη των}$$

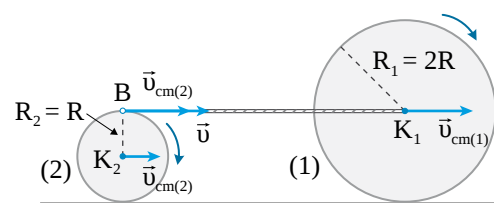
$$\text{σχέσεων (6) και (7) προκύπτει: } \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}$$

$$\text{ή } \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 \frac{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2}{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu(2)}t_1^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 \frac{a_{\gamma\omega\nu(1)}}{a_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή, λόγω}$$

$$\text{της σχέσης (3): } \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2.$$

44. Α. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω $v_{\text{cm}(1)}$ και $v_{\text{cm}(2)}$ οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δίσκων (1) και (2) αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 .



Επειδή ο δίσκος (1) κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{\text{cm}(1)} = \omega_1 R_1$ ή $v_{\text{cm}(1)} = 2\omega_1 R$.

Επειδή ο δίσκος (2) κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{\text{cm}(2)} = \omega_2 R_2$ ή $v_{\text{cm}(2)} = \omega_2 R$.

Το μέτρο $\vec{v}_B$ της ταχύτητας του ανώτατου σημείου B του δίσκου (2) τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_B = 2v_{\text{cm}(2)}$ ή $v_B = 2\omega_2 R$.

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου (2), ισχύει: $v_{\text{cm}(1)} = v_B$ ή $2\omega_1 R = 2\omega_2 R$ ή $\omega_2 = \omega_1$.

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

$$\text{Είναι: } \omega_1 = a_{\gamma\omega\nu(1)} t_1 \quad (1) \text{ και } \omega_2 = a_{\gamma\omega\nu(2)} t_1 \quad (2).$$

Επειδή είναι $\omega_1 = \omega_2$, από τις σχέσεις (1) και

(2) προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$. Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος (1) είναι:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2}{2\pi} \quad (3).$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος (2) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_2 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}t_1^2}{2\pi} \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}} \quad \text{ή} \quad N_2 = N_1$.

Γ. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Το διάστημα που διανύει ο δίσκος (1) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $s = \frac{1}{2}\alpha_{\text{cm}(1)}t_1^2$ (5). Επειδή ο δίσκος (1) κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{\text{cm}(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}2R$, οπότε η σχέση (5) γράφεται: $s = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}Rt_1^2$ (6). Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από την περιφέρεια του δίσκου (2) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell = R\Delta\theta_2$ ή $\ell = R\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}t_1^2$ ή $\ell = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}Rt_1^2$ (7). Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και (7) προκύπτει: $\frac{s}{\ell} = 2$ ή $\ell = \frac{s}{2}$.

45. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Η ταχύτητα $\vec{v}$ του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα $\vec{v}'$ του σημείου επαφής Z του νήματος με την περιφέρεια του κυλίνδρου την ίδια χρονική στιγμή. Έστω ω η γωνιακή ταχύτητα του κα-

ρουλιού τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v = v'$ ή $v = \omega R_2$ ή $v = \omega R$ (1). Επειδή οι δίσκοι κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στις σανίδες, ισχύει: $v_{\text{cm}} = \omega R_1$ ή $v_{\text{cm}} = 2\omega R$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$v_{\text{cm}} = 2v \quad (3).$$

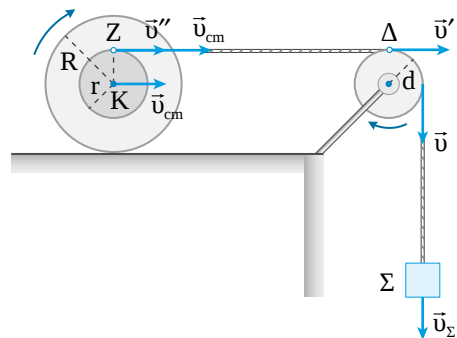
Β. Σωστή επιλογή είναι η α .

Από τη σχέση (3) έχουμε: $\frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = 2\frac{dv}{dt}$ ή $\alpha_{\text{cm}} = 2\alpha$ (4).

Είναι: $h = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$ (5) και $s = \frac{1}{2}\alpha_{\text{cm}}t_1^2$ (6). Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) προκύπτει: $\frac{h}{s} = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{cm}}}$ ή, λόγω της σχέσης (4): $s = 2h$.

46. Α. Σωστή επιλογή είναι η β .

Έστω v_z το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ μια τυχαία χρονική στιγμή t και v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου την ίδια χρονική στιγμή.



Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t και ω_t το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας την ίδια χρονική στιγμή. Επειδή το νήμα είναι μη

εκτατό και δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας, ισχύει:

$$\bar{v}_\Sigma = \bar{v} \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = v \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = \omega_\tau d \quad \text{ή} \quad \frac{dv_\Sigma}{dt} = \frac{d\omega_\tau}{dt} d$$

$$\text{ή} \quad \alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)} d \quad \text{ή} \quad \alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)} \frac{R}{2} \quad (1).$$

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής και στο αυλάκι της τροχαλίας, ισχύει: $\bar{v}_Z = \bar{v}_\Delta$ ή $\bar{v}_{\text{cm}} + \bar{v}'' = \bar{v}'$ ή $v_{\text{cm}} + v'' = v'$ (2), όπου v'' το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z και v' το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα. Είναι: $v'' = \omega r$ (3) και $v' = \omega_\tau d$ (4).

Επειδή ο δίσκος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο, είναι $v_{\text{cm}} = \omega R$ (5). Η σχέση (2), λόγω των σχέσεων (3), (4) και (5) γράφεται: $\omega R + \omega r = \omega_\tau d$ ή $\omega(R + r) = \omega_\tau d$ ή $\frac{3}{2}\omega R = \frac{1}{2}\omega_\tau R$ ή $3\omega = \omega_\tau$ (6).

Παραγωγίζοντας τη σχέση (6), προκύπτει:

$$3 \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_\tau}{dt} \quad \text{ή} \quad 3\alpha_{\gamma_{\text{ων}}} = \alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} = \frac{\alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)}}{3}$$

(7), όπου $\alpha_{\gamma_{\text{ων}}}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου.

Επειδή ο δίσκος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} R$ ή $\alpha_{\gamma_{\text{ων}}} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R}$ (8). Από τη

$$\text{σχέση (1) προκύπτει: } \alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)} = \frac{2\alpha_\Sigma}{R} \quad (9).$$

Η σχέση (7), λόγω των σχέσεων (8) και (9)

$$\text{γράφεται: } \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} = \frac{2}{3} \frac{\alpha_\Sigma}{R} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}} = \frac{2}{3} \alpha_\Sigma.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

$$\text{Είναι: } N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} (\Delta t)^2 \quad (10)$$

$$\text{και } N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)} (\Delta t)^2 \quad (11).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (10) και

$$(11) \text{ προκύπτει: } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\alpha_{\gamma_{\text{ων}}}}{\alpha_{\gamma_{\text{ων}}(\tau)}} \quad \text{ή, λόγω της σχέ-}$$

$$\text{σης (7): } \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad N_2 = 3N_1.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Είναι $h = \frac{1}{2} \alpha_\Sigma (\Delta t)^2$ (12). Το μήκος ℓ του νήματος που ξετυλίγεται από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής σε χρόνο Δt δίνεται από τη σχέση: $\ell = r\Delta\theta_1$ ή $\ell = \frac{R}{2} \frac{1}{2} \alpha_{\gamma_{\text{ων}}} (\Delta t)^2$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (8): } \ell = \frac{1}{4} R \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \ell = \frac{1}{4} \alpha_{\text{cm}} (\Delta t)^2 \quad (13).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (13) προκύπτει:

$$\frac{h}{\ell} = \frac{2\alpha_\Sigma}{\alpha_{\text{cm}}} \quad \text{ή} \quad \frac{h}{\ell} = \frac{2\alpha_\Sigma}{\frac{2}{3}\alpha_\Sigma} \quad \text{ή, επειδή είναι}$$

$$\alpha_{\text{cm}} = (2/3)\alpha_\Sigma \text{ (Α. ερώτημα), } \frac{h}{\ell} = 3 \quad \text{ή} \quad \ell = \frac{h}{3}.$$

47. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Επειδή η σανίδα δεν ολισθαίνει σε σχέση με τους τροχούς, η ταχύτητά της $\bar{v}$ είναι ίση με την ταχύτητα του ανώτατου υλικού σημείου κάθε τροχού. Επομένως, είναι: $\bar{v} = \bar{v}_{\text{ανωτ}(1)}$ ή $v = \omega_1 R_1$ (1) και $\bar{v} = \bar{v}_{\text{ανωτ}(2)}$ ή $v = v_{\text{ανωτ}(2)}$ ή $v = 2v_{\text{cm}}$ ή $v = 2\omega_2 R_2$ (2), όπου ω_1 και ω_2 είναι τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των τροχών (1) και (2) αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\omega_1 R_1 = 2\omega_2 R_2$ ή $\omega_1 R_1 = 2\lambda R_1 \omega_2$ ή $\omega_1 = 2\lambda \omega_2$ (3).

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (1) σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = \frac{\omega_1 t}{2\pi} \quad (4).$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (2) σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_2 = \frac{\omega_2 t}{2\pi} \quad (5). \text{ Με διαίρεση}$$

κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) προκύπτει:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (3):} \quad \frac{N_1}{N_2} = 2\lambda.$$

48. α. Είναι: $v_{cm} = \omega R$ ή $v_{cm} = 12 \text{ m/s}$.

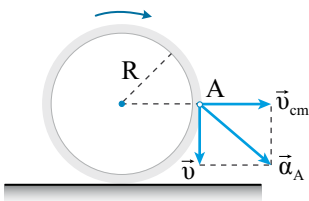
β. Η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\Delta\theta = \omega\Delta t$ ή $\Delta\theta = 240 \text{ rad}$. Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = (120/\pi)$ περιστροφές.

γ. Είναι: $v_{ανωτ} = 2v_{cm}$ ή $v_{ανωτ} = 24 \text{ m/s}$ και $v_{κωτ} = 0$.

49. α. Είναι: $v_{cm} = \frac{s}{t}$ ή $v_{cm} = 20 \text{ m/s}$.

β. Είναι: $v_{cm} = \omega R$ ή $\omega = 40 \text{ rad/s}$.

γ. Έστω το υλικό σημείο A της περιφέρειας του τροχού που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το υλικό σημείο A έχει τη χρονική στιγμή t_1 ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού, και ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού.



Η ταχύτητα του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (1). Επειδή οι ταχύτητες $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} \quad \text{ή} \quad v_A = \sqrt{2}v_{cm}$$

$$\text{ή} \quad v_A = 20\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

δ. Είναι: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = \frac{\omega\Delta t}{2\pi}$ ή $N = (200/\pi)$ περιστροφές.

50. α. Είναι: $a_{cm} = a_{γων}$ ή $a_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$.

β. Είναι: $v_{cm} = a_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 20 \text{ m/s}$.

γ. Είναι: $\Delta x = \frac{1}{2} a_{cm} (\Delta t)^2$ ή $\Delta x = 50 \text{ m}$.

δ. Η μετατόπιση Δx_1 του κέντρου μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_2^2$ ή $\Delta x_1 = 8 \text{ m}$.

Η μετατόπιση Δx_2 του κέντρου μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_{cm} t_3^2$ ή $\Delta x_2 = 32 \text{ m}$.

Συνεπώς, η μετατόπιση $\Delta x'$ του κέντρου μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι $\Delta x' = \Delta x_2 - \Delta x_1$ ή $\Delta x' = 24 \text{ m}$.

$$\text{Ισχύει: } \Delta x' = R\Delta\theta \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \frac{\Delta x'}{R}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 120 \text{ rad}.$$

51. α. Επειδή οι τροχοί κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν, ισχύει:

$$v_{ανωτ} = 2v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_{cm} = 10 \text{ m/s}.$$

β. Είναι: $v_{cm} = a_{cm} t_1$ ή $a_{cm} = 2,5 \text{ m/s}^2$.

$$\text{γ. Είναι: } N = \frac{s}{2\pi R} \quad \text{ή} \quad N = \frac{\frac{1}{2} a_{cm} t_1^2}{2\pi R}$$

$$\text{ή} \quad N = (20/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

δ. Είναι: $\alpha_{\text{ανωτ}} = 2\alpha_{\text{cm}}$ ή $\alpha_{\text{ανωτ}} = 5 \text{ m/s}^2$
και $\alpha_{\text{κατ}} = 0$.

52. α. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{\text{cm}(0)} = \omega_0 R$ ή $v_{\text{cm}(0)} = 10 \text{ m/s}$.

β. Ισχύει: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\text{γων}} t_1$ ή $\alpha_{\text{γων}} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1}$
ή $\alpha_{\text{γων}} = 10 \text{ rad/s}^2$.

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} R$ ή $\alpha_{\text{cm}} = 5 \text{ m/s}^2$.

γ. Είναι: $\Delta\theta = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\text{γων}} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 60 \text{ rad}$.

δ. Είναι: $s = R\Delta\theta$ ή $s = 30 \text{ m}$.

53. α. Έστω α_{cm} το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Η χρονική εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\text{cm}} = v_{\text{cm}(0)} - \alpha_{\text{cm}} t \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $v_{\text{cm}} = 0$ και $t = t_1$ προκύ-

$$\text{πτει: } 0 = v_{\text{cm}(0)} - \alpha_{\text{cm}} t_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}} = \frac{v_{\text{cm}(0)}}{t_1}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

β. Έστω N το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 και Δx η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δίσκου σε αυτό το χρονικό διάστημα. Είναι:

$$N = \frac{\Delta x}{2\pi R} \quad \text{ή} \quad N = \frac{v_{\text{cm}(0)} t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2}{2\pi R}$$

$$\text{ή} \quad N = (125/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

γ. Έστω $v_{\text{cm}(1)}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_{\text{cm}(1)} = v_{\text{cm}(0)} - \alpha_{\text{cm}} t \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}(1)} = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_{\text{cm}(1)} = \omega R \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

δ. Έστω $\Delta x'$ η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει: $N = \frac{\Delta x'}{2\pi R}$

$$\text{ή} \quad \Delta x' = N 2\pi R \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}(0)} t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_2^2 = 2\pi N R$$

$$\text{ή} \quad t_2^2 - 20 t_2 + 64 = 0 \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι:

$$t_2 = 16 \text{ s} \text{ και } t_2 = 4 \text{ s.}$$

Επειδή ο δίσκος δεν έχει ακινητοποιηθεί ακόμα, δεκτή λύση είναι η: $t_2 = 4 \text{ s}$.

Έστω $v_{\text{cm}(2)}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$v_{\text{cm}(2)} = v_{\text{cm}(0)} - \alpha_{\text{cm}} t_2 \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}(2)} = 12 \text{ m/s.}$$

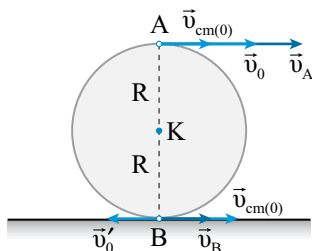
54. α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $v_{\text{cm}(0)} \neq \omega_0 R$. Συνεπώς, ο δίσκος κυλίεται ολισθαίνοντας.

β. Έστω $\vec{v}_A$ το μέτρο της ταχύτητας του ανώτατου σημείου A του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{cm}(0)} + \vec{v}_0$, όπου $\vec{v}_0$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου A τη χρονική στιγμή $t = 0$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{\text{cm}(0)}$ και $\vec{v}_0$ στο σημείο A τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο v_A της ταχύτητας του ανώτατου σημείου του δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση: $v_A = v_{\text{cm}(0)} + v_0$

$$\text{ή} \quad v_A = v_{\text{cm}(0)} + \omega_0 R \quad \text{ή} \quad v_A = 18 \text{ m/s.}$$

Έστω $\vec{v}_B$ το μέτρο της ταχύτητας του κατώτατου σημείου B του δίσκου τη χρονική στιγμή

$t = 0$. Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm(0)} + \vec{v}'_0$ όπου $\vec{v}'_0$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή $t = 0$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm(0)}$ και $\vec{v}'_0$ στο σημείο B, τη χρονική στιγμή $t = 0$, έχουν αντίθετη φορά, το μέτρο v_B της ταχύτητας του κατώτατου σημείου B του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $v_B = v_{cm(0)} - v'_0$ ή $v_B = v_{cm(0)} - \omega_0 R$ ή $v_B = 2 \text{ m/s}$.



γ. Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:

$$\frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ rad/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 και v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου την ίδια χρονική στιγμή.

Επειδή ο δίσκος τη χρονική στιγμή t_1 αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_{cm} = \omega R \quad \text{ή} \quad v_{cm(0)} = (\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1) R \quad \text{ή} \quad t_1 = 5 \text{ s}.$$

55. α. Επειδή ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, το μέτρο v_A της ταχύτητας του ανώτατου σημείου A του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_A = 2v_{cm}$ ή $v_{cm} = 24 \text{ m/s}$, όπου v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 .

Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του τροχού. Είναι:

$$v_{cm} = a_{cm} t_1 \quad \text{ή} \quad a_{cm} = 6 \text{ m/s}^2.$$

β. Επειδή ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 10 \text{ rad/s}^2$.

γ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 80 \text{ rad}.$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (40/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

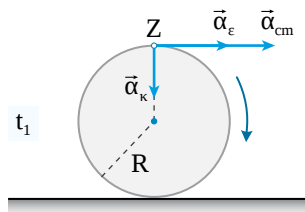
δ. Έστω Δx η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\Delta x = R\Delta\theta \quad \text{ή} \quad \Delta x = 48 \text{ m}.$$

Το ύψος h του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από τη σχέση: $\eta\mu\phi = \frac{h}{\Delta x}$ ή $h = 24 \text{ m}$.

56. α. Είναι: $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $a_{cm} = 5 \text{ m/s}^2$.

β. Το ανώτερο σημείο Z του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 έχει: την επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\epsilon$, την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa$ και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας $\vec{a}_{cm}$. Τα διανύσματα των τριών επιταχύνσεων έχουν σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα.



Η επιτάχυνση $\vec{a}_Z$ του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των επιταχύνσεων $\vec{a}_\epsilon$, $\vec{a}_\kappa$ και $\vec{a}_{cm}$.

Δηλαδή είναι: $\vec{a}_Z = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_{cm} + \vec{a}_\kappa$.

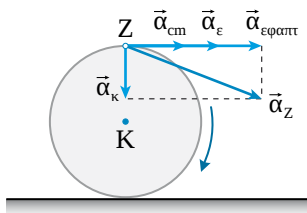
Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου Z είναι σταθερό και υπολογίζεται από τη σχέση: $a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $a_\varepsilon = 5 \text{ m/s}^2$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_\kappa = \omega_1^2 R \quad \text{ή} \quad a_\kappa = 50 \text{ m/s}^2.$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση $\vec{a}_Z$, βρίσκουμε πρώτα τη συνισταμένη ($\vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau}$) των επιταχύνσεων $\vec{a}_{cm}$ και $\vec{a}_\varepsilon$. Είναι: $\vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau} = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_\varepsilon$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}_{cm}$ και $\vec{a}_\varepsilon$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau}$ είναι: $a_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau} = a_\varepsilon + a_{cm}$ ή $a_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau} = 10 \text{ m/s}^2$.

Η επιτάχυνση $\vec{a}_Z$ είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της εφαπτομενικής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau}$ και της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa$: $\vec{a}_Z = \vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau} + \vec{a}_\kappa$.



Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau}$ και $\vec{a}_\kappa$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_Z$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_Z = \sqrt{a_{\varepsilon\phi\alpha\pi\tau}^2 + a_\kappa^2} \quad \text{ή} \quad a_Z = 10\sqrt{26} \text{ m/s}^2.$$

γ. Έστω s_{cm} το διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$s_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \quad \text{ή} \quad s_{cm} = 2,5 \text{ m}.$$

δ. Έστω a_A το μέτρο της επιτάχυνσης του άκρου A του νήματος. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του άκρου A του νήματος είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με την ταχύτητα του ανώτερου σημείου του δίσκου. Δηλαδή είναι: $\vec{v}_A = 2\vec{v}_{cm}$

$$\text{ή} \quad v_A = 2v_{cm} \quad \text{ή} \quad \frac{dv_A}{dt} = 2 \frac{dv_{cm}}{dt} \quad \text{ή} \quad a_A = 2a_{cm}$$

$$\text{ή} \quad a_A = 10 \text{ m/s}^2.$$

Έστω s_A το διάστημα που διανύει το άκρο A του νήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $s_A = \frac{1}{2} \alpha_A t_1^2$ ή $s_A = 5 \text{ m}$.

ε. Είναι: $v_A = 2v_{cm}$ ή $v_A = 2\alpha_{cm} t_2$ ή $v_A = 20 \text{ m/s}$.

57. α. Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Το μέτρο της ταχύτητας ενός ολικού σημείου A της περιφέρειας του δίσκου που απέχει απόσταση $d = R$ από το δάπεδο είναι:

$$v_A = \sqrt{2} v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_{cm} = 8 \text{ m/s}.$$

β. Έστω $v_{cm(0)}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $v_{cm(0)} = \omega_0 R$ ή $v_{cm(0)} = 4 \text{ m/s}$. Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.

Είναι: $v_{cm} = v_{cm(0)} + a_{cm} \Delta t$, όπου Δt το χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, ή $a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$.

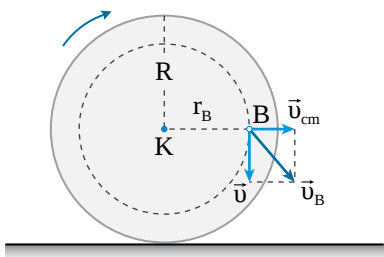
γ. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου. Ισχύει: $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2$. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής

του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 30 \text{ rad}$.

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

ή $N = (15/\pi)$ περιστροφές.

δ. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v_{cm} = \omega R$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$. Το σημείο B τη χρονική στιγμή t_1 έχει γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, και ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου. Έστω $\vec{v}_B$ η ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 .



Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$.

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B τη χρονική t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega r_B$ ή $v = 6 \text{ m/s}$.

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2}$ ή $v_B = 10 \text{ m/s}$.

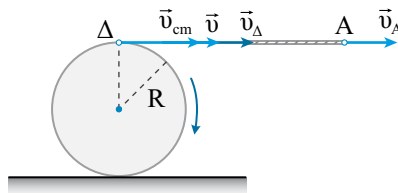
58. α. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική

κή στιγμή t_1 . Είναι: $\ell = R\Delta\theta$ ή $\Delta\theta = 160 \text{ rad}$. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου. Είναι:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\Delta\theta}{t_1^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

β. Η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του άκρου A του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την ταχύτητα $\vec{v}_\Delta$ του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου την ίδια χρονική στιγμή.



Είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_\Delta$ ή $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (1), όπου $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 , λόγω της μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου, και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Δ την ίδια χρονική στιγμή, λόγω της στροφικής κίνησης του κυλίνδρου. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (1) γράφεται: $v_A = v_{cm} + v$ ή $v_A = 2v_{cm}$ (2).

Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$.

Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{cm} = \alpha_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 16 \text{ m/s}$. Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $v_A = 32 \text{ m/s}$.

γ. Έστω a_A το μέτρο της επιτάχυνσης του άκρου A του νήματος. Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\frac{dv_A}{dt} = 2 \frac{dv_{cm}}{dt} \quad \text{ή} \quad \alpha_A = 2\alpha_{cm} \quad \text{ή} \quad \alpha_A = 8 \text{ m/s}^2.$$

Το διάστημα που διανύει το άκρο Α του νήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

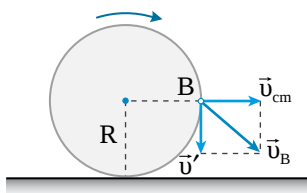
$$s_A = \frac{1}{2} \alpha_A (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad s_A = \frac{1}{2} \alpha_A t_1^2$$

$$\text{ή} \quad s_A = 64 \text{ m}.$$

δ. Έστω το υλικό σημείο Β της περιφέρειας του κυλίνδρου που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, το οποίο τη χρονική στιγμή t_1 απέχει απόσταση $d = R$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η ταχύτητα του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$, όπου $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Β. Επειδή οι ταχύτητες $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετες μεταξύ τους, έχουμε:

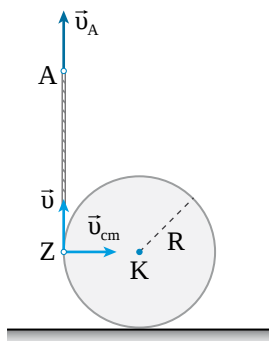
$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + (v')^2} \quad \text{ή} \quad v_B = \sqrt{2v_{cm}^2}$$

$$\text{ή} \quad v_B = \sqrt{2} v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_B = 16\sqrt{2} \text{ m/s}.$$



59. α. Είναι: $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$.

β. Η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του άκρου Α του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ του σημείου Ζ του δίσκου που φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Συνεπώς, είναι: $v_A = v$ ή $v_A = \omega R$ (1), όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.



Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_A = 4 \text{ m/s}.$$

γ. Έστω α_A το μέτρο της επιτάχυνσης του άκρου Α του νήματος. Είναι: $v_A = v$ ή, παραγωγίζοντας: $\frac{dv_A}{dt} = \frac{dv}{dt}$ ή $\frac{dv_A}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt}$

$$\text{ή} \quad \frac{dv_A}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \quad \text{ή} \quad \alpha_A = R \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad \alpha_A = 4 \text{ m/s}^2.$$

Έστω Δx_A η μετατόπιση του άκρου Α του νήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

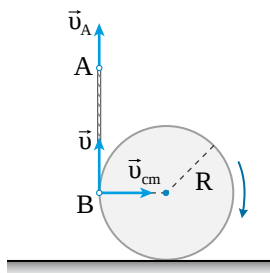
$$\text{Είναι: } \Delta x_A = \frac{1}{2} \alpha_A t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_A = 2 \text{ m}.$$

$$\text{δ. Είναι: } h = \frac{1}{2} \alpha_A t_2^2 \quad \text{ή} \quad t_2 = 2 \text{ s}.$$

Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $v_{cm} = \alpha_{cm} t_2$ ή $v_{cm} = 8 \text{ m/s}$. Το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου Β του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$v_B = 2v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_B = 16 \text{ m/s}.$$

60. α. Έστω ότι το υλικό σημείο Β στο οποίο εφάπτεται ο δίσκος με το νήμα, έχει τη χρονική στιγμή t_1 ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, ισχύει: $\vec{u}_A = \vec{u}$ ή $v_A = v$ ή $v_A = \omega R$ (1), όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), έχουμε: $R = 0,5 \text{ m}$.

β. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 25 \text{ rad.}$$

Το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από τον δίσκο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\ell = R\Delta\theta \quad \text{ή} \quad \ell = 12,5 \text{ m.}$$

γ. Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Έχουμε:

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}} = 1 \text{ m/s}^2.$$

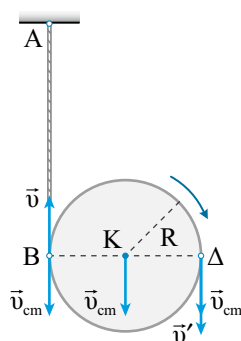
Το διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$s_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \quad \text{ή} \quad s_{\text{cm}} = 12,5 \text{ m.}$$

δ. Έστω $\vec{u}'_{\text{cm}}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $u'_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t_2$ ή $u'_{\text{cm}} = 2 \text{ m/s}$.

Έστω u' η γραμμική ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_2 . Επειδή τα διανύσματα των ταχυτήτων $\vec{u}'_{\text{cm}}$ και $\vec{u}'$ που έχει το σημείο B τη χρονική στιγμή t_2 είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $v_B = \sqrt{(u'_{\text{cm}})^2 + (u')^2}$ ή $v_B = \sqrt{2} u'_{\text{cm}}$ ή $v_B = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$.

61. α. Τη χρονική στιγμή t το σημείο επαφής B του νήματος με τον δίσκο έχει ταχύτητα $\vec{u}_{\text{cm}}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{u}$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{u}_B$ του δίσκου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$v_B = v_{\text{cm}} - v \quad (1).$$

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, ισχύει: $v_B = v_A$ ή $v_B = 0$.

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$0 = v_{\text{cm}} - v \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}} = v \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}} = \omega R \quad (2).$$

Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Από τη σχέση (2) παραγωγίζοντας, προκύπτει:

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = \frac{d\omega}{dt} R$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{cm} = \alpha_{γων} R \quad \text{ή} \quad \alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{γων} = (40/3) \text{ rad/s}^2.$$

$$\beta. \text{ Είναι: } h = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \quad \text{ή} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_{cm}}}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = 0,6 \text{ s.}$$

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \omega_1 = \alpha_{γων} t_1 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 8 \text{ rad/s.}$$

γ. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{cm} = \alpha_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 4 \text{ m/s}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι $v_B = 0$.

Έστω $\vec{v}_\Delta$ η ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_\Delta = v_{cm} + v'$

$$\text{ή} \quad v_\Delta = v_{cm} + \omega R \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (2):}$$

$$v_\Delta = 2v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_\Delta = 8 \text{ m/s.}$$

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\ell = R\Delta\theta$ ή $\Delta\theta = 5,4 \text{ rad}$. Ισχύει:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{γων} t_2^2 \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,9 \text{ s.}$$

Έστω $\vec{v}'_{cm}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } v'_{cm} = \alpha_{cm} t_2 \quad \text{ή} \quad v'_{cm} = 6 \text{ m/s.}$$

62. α. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\ell = R\Delta\theta$ ή $\Delta\theta = 0,9 \text{ rad}$.

Επειδή ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, ισχύει: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{γων} t_1^2$ (1) και

$$\omega = \alpha_{γων} t_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $\frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{1}{2} t_1$

$$\text{ή} \quad t_1 = 0,3 \text{ s.}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

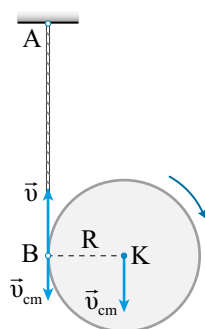
$$\alpha_{γων} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

β. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$v_B = v_A \quad \text{ή} \quad v_{cm} - v = v_A \quad \text{ή} \quad v_{cm} - v = 0$$

$$\text{ή} \quad v_{cm} = \omega R \quad \text{ή} \quad \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

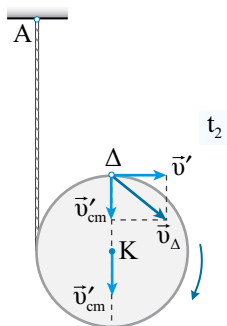
$$\text{ή} \quad \alpha_{cm} = \alpha_{γων} R \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = (20/3) \text{ m/s}^2.$$



γ. Έστω v'_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } v'_{cm} = \alpha_{cm} t_2 \quad \text{ή} \quad v'_{cm} = 10 \text{ m/s.}$$

δ. Έστω $\vec{v}_\Delta$ η ταχύτητα του ανώτατου σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$, όπου $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 .



Επειδή στο σημείο Δ τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_\Delta$ του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\Delta = \sqrt{(v'_{cm})^2 + (v_{cm})^2} \quad \text{ή} \quad v_\Delta = \sqrt{2}v'_{cm}$$

$$\text{ή} \quad v_\Delta = 10\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

63. α. Ισχύει: $h = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$ ή $\alpha = 5 \text{ m/s}^2$.

β. Είναι: $\alpha = \alpha_{γων}$ ή $\alpha_{γων} = 10 \text{ rad/s}^2$.

γ. Είναι: $v_1 = \alpha t_1$ ή $v_1 = 5 \text{ m/s}$.

δ. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$.

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί η τροχαλία από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_1 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_{γων}t_1^2}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad N_1 = (2,5/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί η τροχαλία από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N_2 = \frac{\omega_1(t_2 - t_1)}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad N_2 = (5/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των περιστροφών της τροχαλίας είναι: $N = N_1 + N_2$

$$\text{ή} \quad N = (7,5/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

64. α. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής της τροχαλίας στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = N \cdot 2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 60 \text{ rad.}$$

Η γωνία στροφής της τροχαλίας στο χρονικό διάστημα Δt δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{γων}(\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{γων}t_1^2 \quad (1),$$

όπου $\alpha_{γων}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_1 = \alpha_{γων}t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{γων}} \quad (2).$$

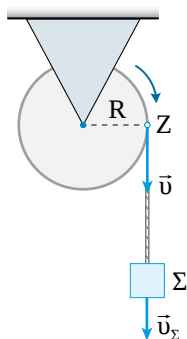
Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2}{\alpha_{γων}} \quad \text{ή} \quad \alpha_{γων} = \frac{\omega_1^2}{2\Delta\theta}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{γων} = 7,5 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από τη σχέση (2) για $\alpha_{γων} = 7,5 \text{ rad/s}^2$ προκύπτει: $t_1 = 4 \text{ s}$.

γ. Έστω $\vec{v}_\Sigma$ η ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Ζ της τροχαλίας που φαίνεται στο σχήμα την ίδια χρονική στιγμή.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας, ισχύει:

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_Z \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = v \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = \omega_1 R$$

$$\text{ή} \quad v_\Sigma = 12 \text{ m/s.}$$

δ. Έστω α_κ το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R} \quad \text{ή} \quad \alpha_\kappa = \frac{(\omega_1 R)^2}{R} \quad \text{ή} \quad \alpha_\kappa = \omega_1^2 R$$

$$\text{ή} \quad \alpha_\kappa = 360 \text{ m/s}^2.$$

65. α. Έστω a_{cm} το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Η χρονική εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$v_{cm} = v_{cm(0)} - a_{cm} t \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $v_{cm} = 0$ και $t = t_1$ προκύπτει: $0 = v_{cm(0)} - a_{cm} t_1$ ή $t_1 = \frac{v_{cm(0)}}{a_{cm}} \quad (2).$

Το διάστημα που διανύει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $s = v_{cm(0)} t_1 - \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \quad (3).$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$s = \frac{v_{cm(0)}^2}{2a_{cm}} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{v_{cm(0)}^2}{2s} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

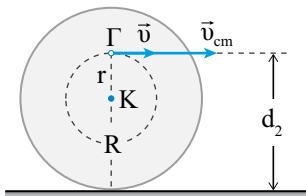
$$\text{Ισχύει: } a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R}$$

$$\text{ή } a_{\gamma\omega\nu} = 15 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $t_1 = 4 \text{ s}.$

$$\text{γ. Είναι: } \frac{v_A}{v_B} = \frac{2v_{cm}}{\sqrt{2} v_{cm}} \quad \text{ή} \quad \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}.$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_3 το σημείο Γ έχει ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου. Η ταχύτητα $\vec{v}_\Gamma$ του σημείου Γ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_\Gamma = \vec{v}_{cm} + \vec{v}.$



Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Γ τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$v_\Gamma = v_{cm} + v \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = \omega R + \omega r, \quad \text{όπου } r = d - R \quad (\text{σύμφωνα με το προηγούμενο σχήμα})$$

$$\text{ή } v_\Gamma = \omega(R + d_2 - R) \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = \omega d_2$$

$$\text{ή } v_\Gamma = (\omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_3) d_2$$

$$\text{ή } v_\Gamma = \left(\frac{v_{cm(0)}}{R} - \frac{a_{cm}}{R} t_3 \right) d_2 \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = 31,5 \text{ m/s}.$$

66. α. Το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_{cm(1)}$ του κέντρου μάζας του τροχού και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_{\gamma\omega\nu(1)}$ του τροχού παραμένουν σταθερά από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}.$ Είναι:

$$a_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{100 - 40}{10 - 0} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } a_{\gamma\omega\nu(1)} = 6 \text{ rad/s}^2.$$

Επειδή ο τροχός κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $a_{cm(1)} = a_{\gamma\omega\nu(1)} R$ ή $a_{cm(1)} = 2,4 \text{ m/s}^2.$

Το μέτρο της επιτάχυνσης (επιβράδυνσης) $\vec{a}_{cm(2)}$ του κέντρου μάζας του τροχού και το μέτρο της γωνιακής του επιβράδυνσης $\vec{a}_{\gamma\omega\nu(2)}$ του τροχού παραμένουν σταθερά από τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}.$ Είναι:

$$a_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{|0 - 100|}{15 - 10} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{ή } a_{\gamma\omega\nu(2)} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

Επειδή ο τροχός κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $a_{cm(2)} = a_{\gamma\omega\nu(2)} R$ ή $a_{cm(2)} = 8 \text{ m/s}^2.$

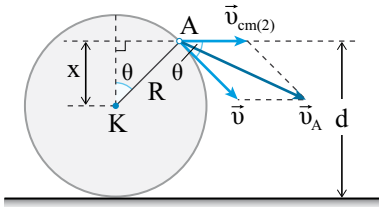
β. Είναι: $v_{\text{ανωτ}} = 2v_{\text{cm}(1)}$ ή $v_{\text{ανωτ}} = 2\omega_1 R$
 ή $v_{\text{ανωτ}} = 2R(\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1)$ ή $v_{\text{ανωτ}} = 41,6 \text{ m/s}$.

γ. Έστω $v_{\text{cm}(2)}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 και ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού την ίδια χρονική στιγμή. Είναι: $v_{\text{cm}(2)} = \omega_2 R$

$$\text{ή } v_{\text{cm}(2)} = (\omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t) R$$

$$\text{όπου } \Delta t = (12 - 10) \text{ s, ή } v_{\text{cm}(2)} = 24 \text{ m/s.}$$

Η ταχύτητα του σημείου A που φαίνεται στο σχήμα τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{cm}(2)} + \vec{v}$, όπου $\vec{v}_{\text{cm}(2)}$ η ταχύτητα του σημείου A, λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού τη χρονική στιγμή t_2 , και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου A την ίδια χρονική στιγμή, λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού.



Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ταχυτήτων $\vec{v}_{\text{cm}(2)}$ και $\vec{v}$ στο σημείο A τη χρονική στιγμή t_2 . Το μέτρο v_A της ταχύτητας του σημείου A τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_A = \sqrt{v_{\text{cm}(2)}^2 + v^2 + 2v_{\text{cm}(2)} v \cos \theta}$$

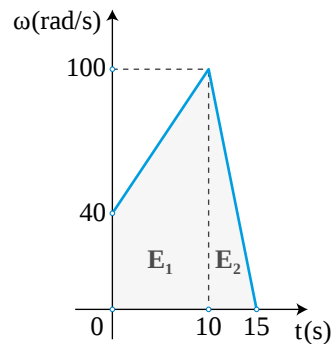
$$\text{ή } v_A = \sqrt{2v_{\text{cm}(2)}^2 + 2v_{\text{cm}(2)}^2 \cos \theta} \quad (1).$$

Από το σχήμα προκύπτει:

$$\cos \theta = \frac{x}{R} \quad \text{ή} \quad \cos \theta = \frac{d-R}{R} \quad \text{ή} \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (2).$$

Τελικά από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $v_A = \sqrt{3} v_{\text{cm}(2)}$ ή $v_A = 24\sqrt{3} \text{ m/s}$.

δ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ είναι αριθμητικά ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν E_1 που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



$$\text{Είναι: } \Delta\theta_1 = E_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = \frac{40+100}{2} 10 \text{ rad}$$

$$\text{ή } \Delta\theta_1 = 700 \text{ rad.}$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_2$ είναι αριθμητικά ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν E_2 που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι:

$$\Delta\theta_2 = E_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = \frac{100 \cdot 5}{2} \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 250 \text{ rad.}$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του τροχού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως της χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 950 \text{ rad}$.

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (475/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

67. α. Το μέτρο του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο επίπεδο είναι ίσο με το μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου.

Έστω ω_0 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Επειδή ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_{\text{cm}(0)} = \omega_0 R \quad \text{ή} \quad \omega_0 = 50 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = N2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 100 \text{ rad.}$$

Η χρονική εξίσωση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $\omega = 0$ και $t = t_1$ προκύπτει: $0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (2).

Η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\Delta\theta = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή, λόγω της σχέσης (2): $\Delta\theta = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta}$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 12,5 \text{ rad/s}^2.$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $t_1 = 4 \text{ s}$.

γ. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$

$$\text{ή} \quad \omega = 12,5 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 . Επειδή ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_{\text{cm}} = \omega R \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}} = 10 \text{ m/s.}$$

δ. Για το μέτρο της ταχύτητας του ανώτατου (σε σχέση με το κεκλιμένο επίπεδο) υλικού σημείου του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει: $v_{\text{ανωτ}} = 2v'_{\text{cm}}$ ή $v'_{\text{cm}} = 24 \text{ m/s}$, όπου v'_{cm} είναι το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 .

Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι: $v'_{\text{cm}} = \omega' R$ ή $\omega' = 30 \text{ rad/s}$. Από τη σχέση (1) για $\omega = \omega'$ και $t = t_3$ προκύπτει:

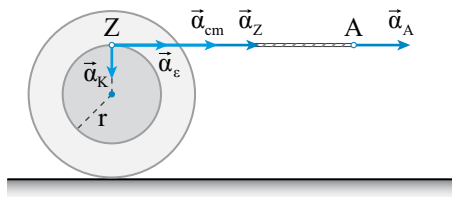
$$\omega' = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_3 \quad \text{ή} \quad t_3 = 1,6 \text{ s.}$$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = v_{\text{cm}(0)} t_3 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_3^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta x = v_{\text{cm}(0)} t_3 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} R t_3^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 51,2 \text{ m.}$$

68. α. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, η επιτάχυνση $\vec{a}_A$ του άκρου A του νήματος είναι ίση με την εφαπτομενική στην κυκλική εγκοπή επιτάχυνση $\vec{a}_Z$ του υλικού σημείου Z που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



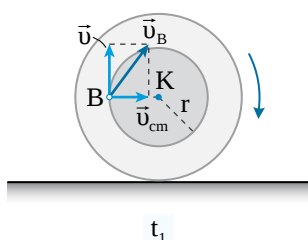
Δηλαδή, είναι: $\vec{a}_A = \vec{a}_\epsilon + \vec{a}_{\text{cm}}$ ή $a_A = a_\epsilon + a_{\text{cm}}$

$$\text{ή} \quad a_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{R}{2} + \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad \text{ή} \quad a_A = \frac{3}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} R$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10 \text{ rad/s}^2.$$

β. Είναι: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} R$ ή $\alpha_{\text{cm}} = 4 \text{ m/s}^2$.

γ. Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t_1$ ή $v_{\text{cm}} = 20 \text{ m/s}$. Η ταχύτητα $\vec{v}_B$ του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 .



Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{\text{cm}} = \omega R$ ή $\omega = 50 \text{ rad/s}$. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$v = \omega r$ ή $v = 10 \text{ m/s}$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{\text{cm}}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_B = \sqrt{v_{\text{cm}}^2 + v^2}$ ή $v_B = 10\sqrt{5} \text{ m/s}$.

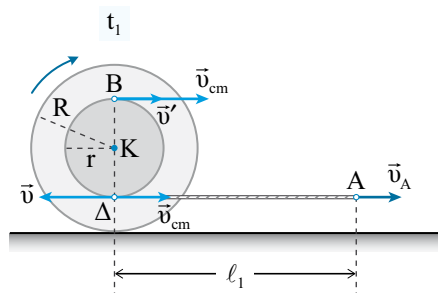
δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\text{γων}} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 125 \text{ rad}$.

Έστω ℓ το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\ell = r\Delta\theta$ ή $\ell = 25 \text{ m}$.

ε. Το μήκος ℓ_2 του οριζόντιου τμήματος του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell_2 = \ell_1 + \ell$ ή $\ell_2 = 27 \text{ m}$.

69. α. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Το σημείο επαφής Δ του νήματος με τον δίσκο έχει ταχύτητα $\vec{v}_{\text{cm}}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του άκρου A του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Δ την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_\Delta$ ή $\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}$ ή $v_A = v_{\text{cm}} - v$ ή $v_A = \omega R - \omega \frac{R}{2}$ ή $v_A = \omega \frac{R}{2}$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

β. Έστω $\vec{v}_B$ η ταχύτητα του σημείου B. Είναι:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}' \quad \text{ή} \quad v_B = \omega R + \omega \frac{R}{2}$$

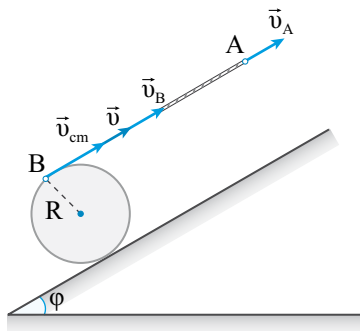
$$\text{ή} \quad v_B = \frac{3}{2} \omega R \quad \text{ή} \quad v_B = 12 \text{ m/s}.$$

γ. Είναι: $\omega = \alpha_{\text{γων}} t_1$ ή $\alpha_{\text{γων}} = 5 \text{ rad/s}^2$.

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\text{γων}} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 40 \text{ rad}$. Το μήκος ℓ του νήματος που τυλίγεται στον δίσκο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell = r\Delta\theta$ ή $\ell = 8 \text{ m}$.

ε. Το μήκος του οριζόντιου τμήματος του νήματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\ell_2 = \ell_1 - \ell$ ή $\ell_2 = 2 \text{ m}$.

70. α. Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία η ταχύτητα του άκρου A του νήματος είναι $\vec{v}_A$. Την ίδια χρονική στιγμή το σημείο B, στο οποίο το νήμα εφάπτεται με τον κύλινδρο έχει ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου, και ταχύτητα $\vec{v}$ λόγω της στροφικής κίνησης του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου, ισχύει: $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ ή $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$ (1).

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (1) γράφεται:

$$v_A = v_{cm} + v \text{ ή } v_A = 2v_{cm} \text{ ή παραγωγίζοντας:}$$

$$\frac{dv_A}{dt} = 2 \frac{dv_{cm}}{dt} \text{ ή } a_A = 2a_{cm} \text{ ή } a_{cm} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$ ή $\alpha_{γων} = 25 \text{ rad/s}^2$.

β. Έστω Δx_{cm} η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\eta\mu\phi = \frac{h}{\Delta x_{cm}}$ ή

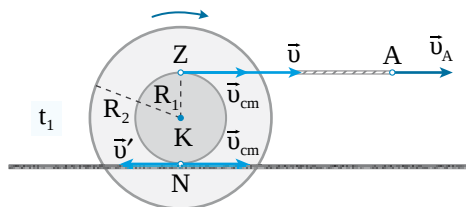
$$\Delta x_{cm} = 40 \text{ m. Είναι: } \Delta x_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \text{ ή } t_1 = 4 \text{ s.}$$

Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v_{cm} = a_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 20 \text{ m/s}$. Έστω v_A το μέτρο της ταχύτητας του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v_A = 2v_{cm}$ ή $v_A = 40 \text{ m/s}$.

γ. Είναι: $v_{cm} = \omega R$ ή $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

δ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{γων} t_1^2$ ή $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{cm}}{R} t_1^2$ ή $\Delta\theta_1 = 200 \text{ rad}$. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\Delta\theta_2 = \omega(t_2 - t_1)$ ή $\Delta\theta_2 = 200 \text{ rad}$. Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 400 \text{ rad}$. Το ζητούμενο πλήθος N των περιστροφών υπολογίζεται από τη σχέση: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = (200/\pi)$ περιστροφές.

71. α. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του καρουλιού τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του ελεύθερου άκρου A του νήματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την ταχύτητα $\vec{v}_Z$ του σημείου επαφής του νήματος με τον κύλινδρο την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή, είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_Z$ (1).



Έστω $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 , λόγω της μεταφορικής κίνησης που εκτελεί το καρούλι, και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Z την ίδια χρονική στιγμή, λόγω της στροφικής κίνησης που εκτελεί το καρούλι. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v} \quad \text{ή} \quad v_A = v_{cm} + v$$

$$\text{ή} \quad v_A = v_{cm} + \omega R_1 \quad (2).$$

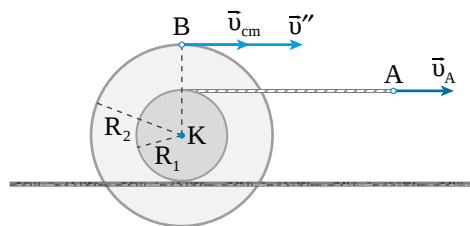
Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα, το σημείο επαφής του N με τη σανίδα τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα ίση με το μηδέν. Δηλαδή είναι: $\vec{v}_N = \vec{0}$ ή $\vec{v}_{cm} + \vec{v}' = \vec{0}$ ή $v_{cm} - v' = 0$ ή $v_{cm} = v'$ ή $v_{cm} = \omega R_1 \quad (3).$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$v_A = 2\omega R_1 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{v_A}{2R_1} \quad \text{ή} \quad \omega = 100 \text{ rad/s}.$$

β. Είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 25 \text{ rad/s}^2.$

γ. Έστω B το ανώτερο υλικό σημείο ενός από τους δύο δίσκους τη χρονική στιγμή t_1 .



Έστω $\vec{v}_B$ η ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 και $\vec{v}''$ η γραμμική του ταχύτητα την ίδια χρονική στιγμή. Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}''$ ή $v_B = v_{cm} + v''$ ή $v_B = \omega R_1 + \omega R_2$ ή $v_B = \omega(R_1 + R_2)$ ή $v_B = 30 \text{ m/s}.$

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του καρουλιού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική

στιγμή t_1 . Είναι $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 200 \text{ rad}.$

Το μήκος του τόξου που διανύει ένα υλικό σημείο της περιφέρειας ενός από τους δύο δίσκους υπολογίζεται από τη σχέση: $s = R_2 \Delta\theta$ ή $s = 40 \text{ m}.$

ε. Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του καρουλιού.

Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1$ ή $a_{cm} = 2,5 \text{ m/s}^2.$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του καρουλιού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_{cm} = 20 \text{ m}.$$

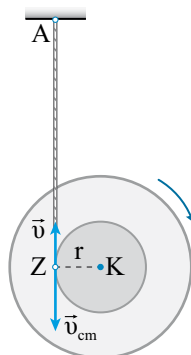
Έστω ℓ το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\ell = R_1 \Delta\theta$ ή $\ell = 20 \text{ m}.$

72. α. Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 10 \text{ rad/s}^2.$

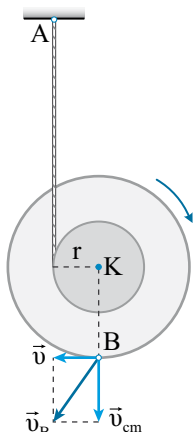
β. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκόπης, ισχύει κάθε χρονική στιγμή: $\vec{v}_Z = \vec{v}_A$ ή $\vec{v}_{cm} + \vec{v} = \vec{0}$ ή $v_{cm} - v = 0$ ή $v_{cm} = v$ ή $v_{cm} = \omega r \quad (1).$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r \quad \text{ή} \quad a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2.$$

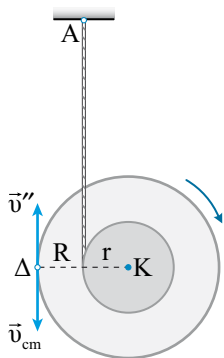


γ. Είναι: $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'$ όπου $\vec{v}'$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 .
Είναι: $v' = \omega_1 R$ ή $v' = 4 \text{ m/s}$.



Από τη σχέση (1) προκύπτει: $v_{cm} = \omega_1 r$ ή $v_{cm} = 2 \text{ m/s}$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + (v')^2}$ ή $v_B = \sqrt{20} \text{ m/s}$.

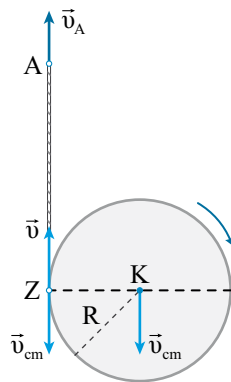
δ. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}''$ του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:
 $v'' = \omega R$ ή $v'' = 4 \text{ m/s}$.



Έστω $\vec{v}_\Delta$ η ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}''$ ή

$v_\Delta = v_{cm} - v''$ ή $v_\Delta = -2 \text{ m/s}$. Δηλαδή η ταχύτητα $\vec{v}_\Delta$ του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και έχει μέτρο: $|v_\Delta| = 2 \text{ m/s}$.

73. α. Η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του ελεύθερου άκρου A του νήματος είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με την ταχύτητα $\vec{v}_Z$ του σημείου επαφής Z του νήματος με τον δίσκο. Έστω $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου και $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Z μια τυχαία χρονική στιγμή.



Είναι: $\vec{v}_A = \vec{v}_Z$ ή $\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{v}_{cm}$

ή $v_A = v - v_{cm}$ ή $v_A = \omega R - v_{cm}$

ή $\frac{dv_A}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R - \frac{dv_{cm}}{dt}$ ή $\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} R - \alpha_{cm}$

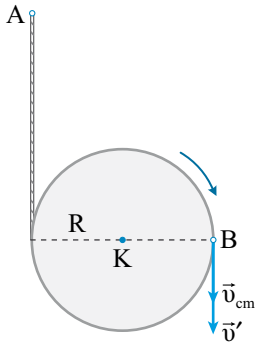
ή $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R - \alpha_A$ ή $\alpha_{cm} = 6 \text{ m/s}^2$.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$v_{cm} = \alpha_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 12 \text{ m/s}$.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή

$\omega = 80 \text{ rad/s}$. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}'$ του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v' = \omega R$ ή $v' = 16 \text{ m/s}$.

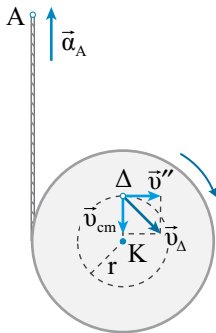


Έστω $\bar{v}_B$ η ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\bar{v}_B = \bar{v}_{cm} + \bar{v}'$

$$\text{ή } v_B = v_{cm} + v' \text{ ή } v_B = 28 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω $\bar{v}''$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v'' = \omega r$

$$\text{ή } v'' = 8 \text{ m/s.}$$



Το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}_\Delta$ του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\Delta = \sqrt{v_{cm}^2 + (v'')^2} \text{ ή } v_\Delta = \sqrt{208} \text{ m/s.}$$

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει: $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}t_1^2$ ή $\Delta\theta = 80 \text{ rad.}$

Το μήκος ℓ του νήματος που ξετυλίγεται από το αυλάκι του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\ell = R\Delta\theta$ ή $\ell = 16 \text{ m.}$

Έστω Δx_{cm} η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 \text{ ή } \Delta x_{cm} = 12 \text{ m.}$$

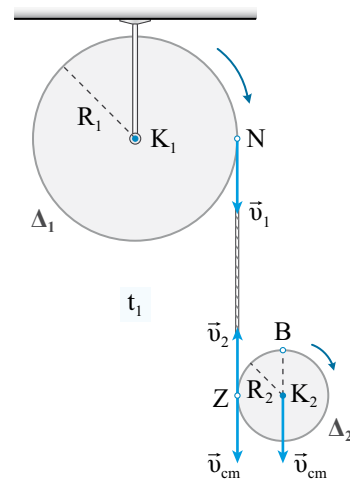
74. α. Έστω ω_1 και ω_2 τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των δίσκων Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στις περιφέρειες των δύο δίσκων, κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$\bar{v}_Z = \bar{v}_N \text{ ή } \bar{v}_{cm} + \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \text{ ή } v_{cm} - v_2 = v_1$$

$$\text{ή } v_{cm} - \omega_2 R_2 = \omega_1 R_1$$

$$\text{ή } \frac{dv_{cm}}{dt} - \frac{d\omega_2}{dt} R_2 = \frac{d\omega_1}{dt} R_1$$

$$\text{ή } \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} R_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} R_1 \text{ ή } \alpha_{cm} = 8 \text{ m/s}^2.$$

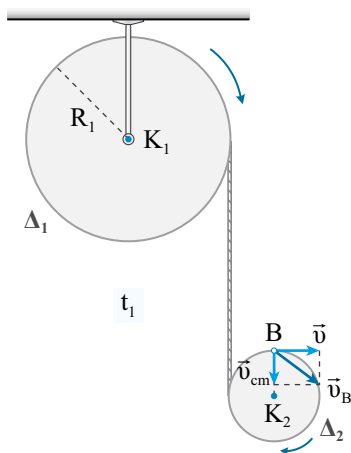


β. Είναι: $v_{cm} = \alpha_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 8 \text{ m/s.}$

γ. Είναι: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} t_1$ ή $\omega_2 = 40 \text{ rad/s.}$

Έστω v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } v = \omega_2 R_2 \text{ ή } v = 4 \text{ m/s.}$$



Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} \quad \text{ή} \quad v_B = \sqrt{80} \text{ m/s.}$$

δ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου Δ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι } \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 5 \text{ rad.}$$

Το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από τον δίσκο Δ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell_1 = R_1 \Delta\theta_1$

$$\text{ή} \quad \ell_1 = 2 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του δίσκου Δ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} t_1^2$ ή $\Delta\theta_2 = 20 \text{ rad}$. Το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από τον δίσκο Δ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell_2 = R_2 \Delta\theta_2$

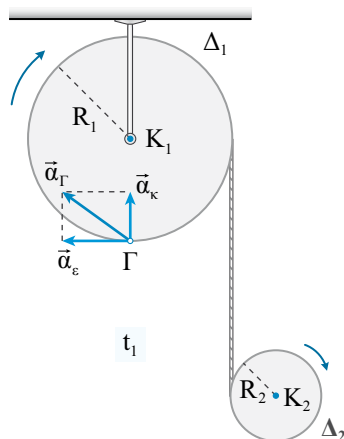
$$\text{ή} \quad \ell_2 = 2 \text{ m.}$$

Συνεπώς, το συνολικό μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί και από τους δύο δίσκους είναι:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 \quad \text{ή} \quad \ell = 4 \text{ m.}$$

ε. Το σημείο Γ της περιφέρειας του δίσκου Δ_1 που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα τη χρονική στιγμή t_1 έχει επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\epsilon$ και κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa$. Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου Γ είναι:

$\alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} R_1$ ή $\alpha_\epsilon = 4 \text{ m/s}^2$. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου Δ_1 τη χρονική στιγμή t_1 .
Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Γ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_\kappa = \omega_1^2 R$ ή $\alpha_\kappa = 40 \text{ m/s}^2$.

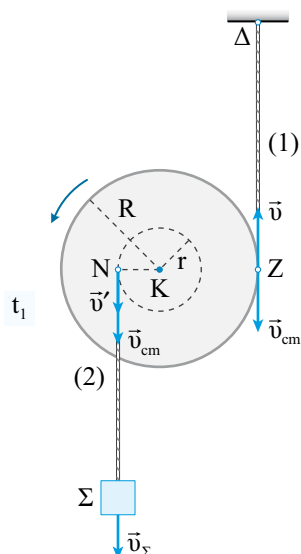


Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}_\kappa$ και $\vec{a}_\epsilon$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_\Gamma$ του σημείου Γ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\Gamma = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_\Gamma = \sqrt{1.616} \text{ m/s}^2.$$

75. α. Είναι: $v_\Sigma = \alpha_\Sigma t_1$ ή $\alpha_\Sigma = 1 \text{ m/s}^2$.

β. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .



Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, ισχύει:

$$\vec{v}_Z = \vec{v}_\Delta \quad \text{ή} \quad \vec{v}_Z = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{cm} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{ή} \quad v_{cm} - v = 0 \quad \text{ή} \quad v_{cm} = v \quad \text{ή} \quad v_{cm} = \omega R \quad (1) \text{ και}$$

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_N \quad \text{ή} \quad \vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{cm} + \vec{v}' \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = v_{cm} + v'$$

$$\text{ή} \quad v_\Sigma = \omega R + \omega r \quad \text{ή} \quad \omega = 4 \text{ rad/s.}$$

$$\gamma. \text{ Είναι: } \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

δ. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = 0,8 \text{ m/s}^2.$$

ε. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta = 4 \text{ rad}$.

Το μήκος ℓ_1 του νήματος (1) που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\ell_1 = R\Delta\theta$ ή $\ell_1 = 1,6 \text{ m}$. Το μήκος ℓ_2 του νήματος (2) που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι: $\ell_2 = r\Delta\theta$ ή $\ell_2 = 0,4 \text{ m}$.

76. α. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$v_1 = v_{\text{περ}(1)} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega R_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_1$$

$$\text{ή} \quad \alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$

β. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$v_2 = v_{\text{περ}(2)} \quad \text{ή} \quad v_2 = \omega R_2 \quad \text{ή} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_2$$

$$\text{ή} \quad \alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

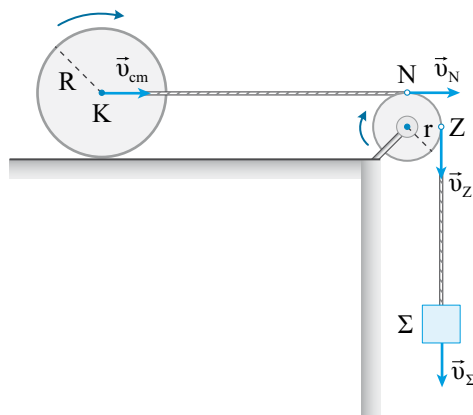
γ. Ισχύει: $v_1 = \omega_1 R_1$ ή $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$.

$$\delta. \text{ Ισχύει: } d = s_1 + s_2 \quad \text{ή} \quad d = \frac{1}{2} \alpha_1 t_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 t_2^2$$

$$\text{ή} \quad t_2 = 1 \text{ s.}$$

$$\epsilon. \text{ Ισχύει: } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 5 \text{ rad.}$$

77. α. Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 και v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z της περιφέρειας της τροχαλίας, που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, την ίδια χρονική στιγμή.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, ισχύει: $\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_Z$ ή $v_\Sigma = v$ ή $v_\Sigma = \omega r$ (1), όπου ωr το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 . Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} r \quad \text{ή} \quad \alpha = \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} r$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

β. Έστω $\bar{v}_{cm}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου μια τυχαία χρονική στιγμή t . Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, ισχύει: $\bar{v}_k = \bar{v}_N$ ή $\bar{v}_{cm} = \bar{v}_N$ ή $v_{cm} = v$

$$\text{ή} \quad v_{cm} = \omega_r r \quad (2) \quad \text{ή} \quad \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} r$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} r \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2.$$

γ. Είναι: $h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2$ ή $t_1 = 1 \text{ s}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{cm} = \alpha_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 2 \text{ m/s}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του ανώτατου σημείου του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_{ανωτ} = 2v_{cm} \quad \text{ή} \quad v_{ανωτ} = 4 \text{ m/s}.$$

δ. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι: $v_z = v_{cm}$ ή $v_z = 2 \text{ m/s}$. Συνεπώς, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $K_z = \frac{1}{2} m v_z^2$ ή $K_z = 2 \text{ J}$.

ε. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } v_{cm} = \omega R \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Επειδή ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο, ισχύει: $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega v} R$ ή $\alpha_{\gamma\omega v} = 5 \text{ rad/s}^2$.

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta = \omega(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v} (t_2 - t_1)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 120 \text{ rad}.$$

Συνεπώς, το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (60/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

78. α. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ της τροχαλίας από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

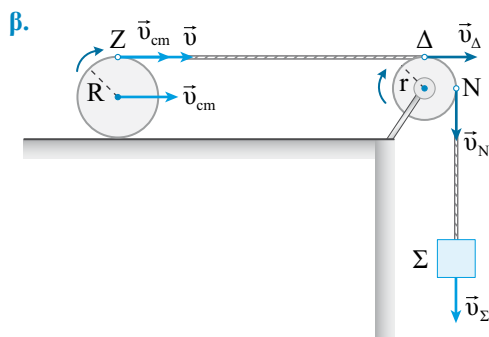
$$\Delta\theta_1 = N2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 90 \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι: } \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} t_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} t_1^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{\omega_1}{\Delta\theta_1} = \frac{2}{t_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = 3 \text{ s}. \text{ Συνεπώς,}$$

$$\text{από τη σχέση (1) προκύπτει: } \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} = 20 \text{ rad/s}^2.$$



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, ισχύει:

$$\bar{v}_z = \bar{v}_N \quad \text{ή} \quad v_z = \omega_r r \quad \text{ή} \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} r$$

$$\text{ή} \quad \alpha_z = \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} r \quad \text{ή} \quad \alpha_z = 4 \text{ m/s}^2.$$

γ. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας και του κυλίνδρου, ισχύει: $\bar{v}_z = \bar{v}_\Delta$ ή $\bar{v}_{cm} + \bar{v} = \bar{v}_\Delta$

$$\text{ή} \quad 2v_{cm} = \omega_r r \quad \text{ή} \quad 2 \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} r$$

$$\text{ή} \quad 2\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega v(\tau)} r \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2.$$

δ. Είναι: $h = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t_2^2$ ή $t_2 = 2 \text{ s}$.

Έστω α_{γ} το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου. Επειδή ο κύλινδρος κυλίστα χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma} R \text{ ή } \alpha_{\gamma} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω ω_K το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\omega_K = \alpha_{\gamma} t_2 \text{ ή } \omega_K = 8 \text{ rad/s}.$$

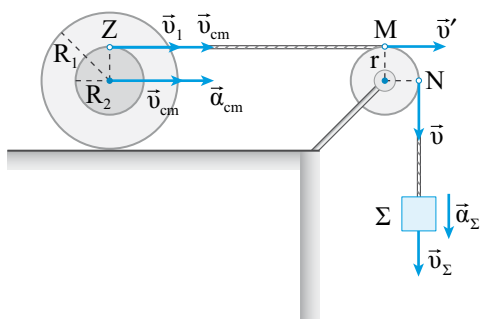
ε. Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t_2^2 \text{ ή } \Delta\theta_2 = 8 \text{ rad}.$$

Το μήκος ℓ του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\ell = R\Delta\theta_2$ ή $\ell = 4 \text{ m}$.

79. α. Έστω α_{Σ} το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ. Είναι: $v_{\Sigma} = \alpha_{\Sigma} t_1$ ή $\alpha_{\Sigma} = 3 \text{ m/s}^2$.

β. Έστω $\vec{v}$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου Ν της περιφέρειας της τροχαλίας που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα τη χρονική στιγμή t_1 και ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας την ίδια χρονική στιγμή.



Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, ισχύει: $\vec{v}_{\Sigma} = \vec{v}$ ή $v_{\Sigma} = v$ ή $v_{\Sigma} = \omega r$ ή $\omega = 60 \text{ rad/s}$.

Έστω α_{γ} το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας. Είναι:

$$\omega = \alpha_{\gamma} t_1 \text{ ή } \alpha_{\gamma} = 30 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής της τροχαλίας στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} (\Delta t)^2 \text{ ή } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t_1^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta = 60 \text{ rad}.$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί η τροχαλία στο χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \text{ ή } N = (30/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

γ. Έστω $\vec{v}_{\text{cm}}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 και ω' το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας την ίδια χρονική στιγμή. Το σημείο επαφής Z του νήματος με τον δίσκο έχει τη χρονική στιγμή t_1 ταχύτητα $\vec{v}_{\text{cm}}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου, και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}_1$, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου. Η ταχύτητα $\vec{v}_Z$ του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_Z = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_1$.

Το σημείο M της περιφέρειας της τροχαλίας που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα έχει τη χρονική στιγμή t_1 γραμμική ταχύτητα $\vec{v}'$. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας και στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, ισχύει:

$$\vec{v}_Z = \vec{v}_M \text{ ή } \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_1 = \vec{v}'$$

$$\text{ή } \omega' R_1 + \omega' R_2 = \omega r$$

$$\text{ή } \omega' (R_1 + R_2) = \omega r \quad (1).$$

Έστω $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου και α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Επειδή ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\alpha_{cm} = \alpha'_{\gamma\omega\nu} R_1 \quad (2).$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{d\omega'}{dt} (R_1 + R_2) = \frac{d\omega}{dt} r$$

$$\text{ή } \alpha'_{\gamma\omega\nu} (R_1 + R_2) = \alpha_{\gamma\omega\nu} r \text{ ή } \alpha'_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $\alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$.

δ. Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $\omega' = 10 \text{ rad/s}$.

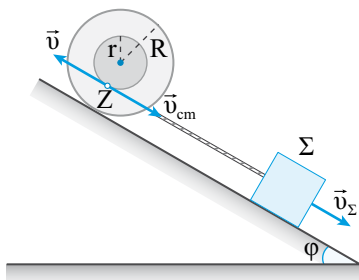
ε. Έστω $\Delta\theta'$ η γωνία που διαγράφει ο δίσκος στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\Delta\theta' = \frac{1}{2} \alpha'_{\gamma\omega\nu} (\Delta t)^2 \text{ ή } \Delta\theta' = \frac{1}{2} \alpha'_{\gamma\omega\nu} t_1^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta' = 10 \text{ rad}.$$

Το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής στο χρονικό διάστημα Δt είναι: $\ell = R_2 \Delta\theta'$ ή $\ell = 2 \text{ m}$.

80. α. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 και v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του την ίδια χρονική στιγμή.

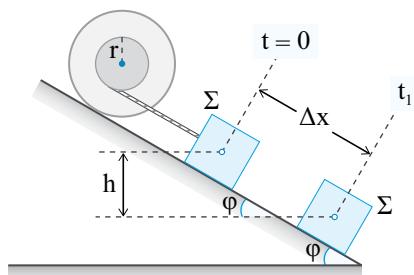


Σύμφωνα με το σχήμα, ισχύει:

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_Z \text{ ή } \vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{cm} + \vec{v} \text{ ή } v_\Sigma = v_{cm} - v$$

$$\text{ή } v_\Sigma = \omega R - \omega r \text{ ή } \omega = \frac{v_\Sigma}{R - r} \text{ ή } \omega = 20 \text{ rad/s}.$$

β. Έστω Δx η μετατόπιση του σώματος Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\eta\mu\phi = \frac{h}{\Delta x}$ ή $\Delta x = 1 \text{ m}$.



$$\text{Είναι: } \Delta x = \frac{1}{2} \alpha_\Sigma t_1^2 \quad (1) \text{ και } v_\Sigma = \alpha_\Sigma t_1 \quad (2).$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει: $\alpha_\Sigma = 2 \text{ m/s}^2$.

γ. Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $t_1 = 1 \text{ s}$. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου.

$$\text{Είναι: } \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

Επειδή ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$.

δ. Επειδή το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ , το νήμα κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος δίσκος – σώμα Σ τυλίγεται στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως της χρονική στιγμή t_1 .

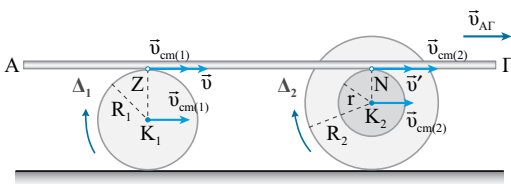
Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2$ ή $\Delta\theta = 10 \text{ rad}$.

Το μήκος ℓ του νήματος που έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\ell = r\Delta\theta$ ή $\ell = 1 \text{ m}$. Το μήκος ℓ_2 του (τεντωμένου) τμήματος του νήματος που δεν είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\ell_2 = \ell_1 - \ell$ ή $\ell_2 = 1 \text{ m}$.

81. α. Επειδή η ράβδος ΑΓ εφάπτεται στο ανώτατο σημείο Ζ του δίσκου Δ_1 , η ταχύτητά της $\vec{v}_{\text{ΑΓ}}$ θα είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με την ταχύτητα $\vec{v}_{\text{ανωτ}(1)}$ του ανώτερου σημείου Ζ του δίσκου Δ_1 . Επομένως:

$$\vec{v}_{\text{ΑΓ}} = \vec{v}_{\text{ανωτ}(1)} \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{\text{ΑΓ}} = \vec{v}_{\text{cm}(1)} + \vec{v}$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = v_{\text{cm}(1)} + v \quad (1).$$



Επειδή ο δίσκος Δ_1 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{\text{cm}(1)} = \omega_1 R_1$. Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_{\text{ΑΓ}} = \omega_1 R_1 + \omega_1 R_1 \quad \text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = 2\omega_1 R_1$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = 2v_{\text{cm}(1)} \quad \text{ή} \quad \frac{dv_{\text{ΑΓ}}}{dt} = 2 \frac{dv_{\text{cm}(1)}}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \alpha = 2\alpha_{\text{cm}(1)} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}(1)} = 0,3 \text{ m/s}^2.$$

β. Από το σχήμα προκύπτει ότι: $2R_1 = R_2 + r$ ή $r = 0,2 \text{ m}$. Η ταχύτητα $\vec{v}_{\text{ΑΓ}}$ της ράβδου είναι ίση κάθε χρονική στιγμή με την ταχύτητα $\vec{v}_{\text{ανωτ}(2)}$ του ανώτατου υλικού σημείου Ν του

κυκλικού εξογκώματος του δίσκου Δ_2 . Επομένως, είναι:

$$\vec{v}_{\text{ΑΓ}} = \vec{v}_{\text{ανωτ}(2)} \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{\text{ΑΓ}} = \vec{v}_{\text{cm}(2)} + \vec{v}'$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = v_{\text{cm}(2)} + \omega_2 r \quad (2).$$

Επειδή ο δίσκος Δ_2 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $v_{\text{cm}(2)} = \omega_2 R_2$. Επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$v_{\text{ΑΓ}} = \omega_2 R_2 + \omega_2 r \quad \text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = \omega_2 (R_2 + r)$$

$$\text{ή} \quad v_{\text{ΑΓ}} = \frac{v_{\text{cm}(2)}}{R_2} (R_2 + r)$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv_{\text{ΑΓ}}}{dt} = \frac{dv_{\text{cm}(2)}}{dt} \frac{R_2 + r}{R_2}$$

$$\text{ή} \quad \alpha = \alpha_{\text{cm}(2)} \frac{R_2 + r}{R_2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}(2)} = \frac{R_2}{R_2 + r} \alpha$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}(2)} = 0,4 \text{ m/s}^2.$$

γ. Το κέντρο μάζας της ράβδου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 μετατοπίζεται κατά $\Delta x_p = \Delta x_{\Delta_1} + d$ (3), όπου Δx_{Δ_1} η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δίσκου Δ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha_{\text{cm}(1)}t_1^2 + d \quad \text{ή} \quad t_1 = \sqrt{2} s.$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου Δ_1 . Επειδή ο δίσκος Δ_1 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{\text{cm}(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} R_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 1 \text{ rad/s}^2$. Το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου Δ_1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t_1$ ή $\omega_1 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$.

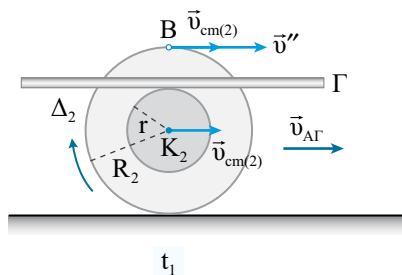
δ. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου Δ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο δίσκος Δ_2 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\alpha_{\text{cm}(2)} = \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} R_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} = 1 \text{ rad/s}^2.$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta_2$ του δίσκου Δ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 1 \text{ rad}.$$

ε. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου Δ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} t_1$ ή $\omega_2 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$. Έστω B το ανώτατο σημείο του δίσκου Δ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Η ταχύτητα $\vec{v}_B$ του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:



$\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{cm}(2)} + \vec{v}''$ (3), όπου $\vec{v}''$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$v_B = v_{\text{cm}(2)} + v'' \quad \text{ή} \quad v_B = \omega_2 R_2 + \omega_2 R_2$$

$$\text{ή} \quad v_B = 2\omega_2 R_2 \quad \text{ή} \quad v_B = 0,8 \sqrt{2} \text{ m/s}.$$

82. α. Είναι: $\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t_1^2$ ή $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$.

Έστω v το μέτρο της σανίδας τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $v = \alpha t_1$ ή $v = 4 \text{ m/s}$.

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου (1) τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή η σανίδα δεν ολισθαίνει σε σχέση με τον δίσκο (1), η ταχύτητά της τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την ταχύτητα του ανώτατου σημείου

του δίσκου (1).

$$\text{Επομένως: } \vec{v} = \vec{v}_{\text{ανωτ}(1)} \quad \text{ή} \quad v = \omega_1 R_1$$

$$\text{ή} \quad \omega_1 = 40 \text{ rad/s}.$$

Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου (2) τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή η σανίδα δεν ολισθαίνει σε σχέση με τον δίσκο (2), η ταχύτητά της τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την ταχύτητα του ανώτατου σημείου του δίσκου (2). Επομένως: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{ανωτ}(2)}$ (1). Επειδή ο δίσκος (2) κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\vec{v}_{\text{ανωτ}(2)} = 2\vec{v}_{\text{cm}(2)}$ (2), όπου $\vec{v}_{\text{cm}(2)}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου (2) τη χρονική στιγμή t_1 . Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\vec{v} = 2\vec{v}_{\text{cm}}$ ή $v = 2\omega_2 R_2$

$$\text{ή} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s}.$$

γ. Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\text{v}(1)} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\text{v}(1)} = 20 \text{ rad/s}^2$.

δ. Είναι: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} = 5 \text{ rad/s}^2$. Επειδή ο δίσκος (2) κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} R_2$ ή $\alpha_{\text{cm}} = 1 \text{ m/s}^2$.

ε. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου (2) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\text{v}(2)} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 10 \text{ rad}.$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος (2) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (5/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

2.3 Ροπή Δύναμης

ΘΕΜΑΤΑ Α

A. Θέματα πολλαπλής επιλογής

3. β	4. δ	5. γ	6. β	7. β
8. δ	9. γ	10. α	11. β	12. δ
13. γ	14. δ	15. γ	16. γ	17. δ
18. α	19. β			

B. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

20.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
21.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
22.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
23.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
24.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	

ΘΕΜΑΤΑ Β

25. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Θεωρώντας ως θετική φορά περιστροφής την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = +F_2 x - F_3 3x$$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = +2Fx - 3Fx \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = -Fx$$

$$\text{ή} \quad |\Sigma \tau_{(A)}| = Fx.$$

26. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Αν θεωρήσουμε θετικές τις ροπές των δυνάμεων που τείνουν να περιστρέψουν τον δίσκο αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = +F_3 R - F_1 R - F_2 R$$

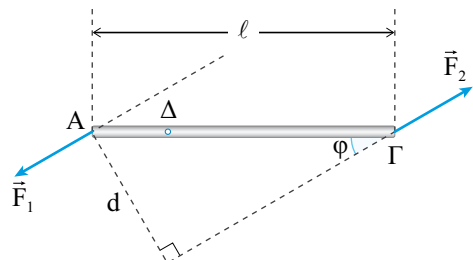
$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(K)} = 4FR - FR - 2FR \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(K)} = +FR.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Βλέπε θεωρία: «Ροπή ζεύγους δυνάμεων».

28. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους και αν υπολογιστεί και έχει μέτρο που ισούται με το γινόμενο του μέτρου της μιας από τις δύο δυνάμεις επί την απόσταση d των φορέων των δυνάμεων. Δηλαδή, είναι: $\Sigma \tau = F_1 d$ (1).



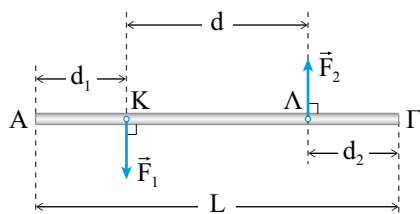
Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι: $\eta \mu \varphi = \frac{d}{l}$ ή $d = \frac{1}{2} l$ (2). Επομένως, από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει:

$$\Sigma \tau = \frac{1}{2} F_1 l.$$

29. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Το μέτρο της συνισταμένης ροπής του ζεύγους των δύο δυνάμεων δίνεται από τη σχέση: $\Sigma \tau = F_1 d$ (1), όπου d η απόσταση των φορέων των δυνάμεων. Αφού σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $\Sigma \tau = \frac{1}{2} F_1 L$, από τη σχέση (1)

$$\text{προκύπτει: } d = \frac{L}{2}.$$



Σύμφωνα με το σχήμα, είναι:

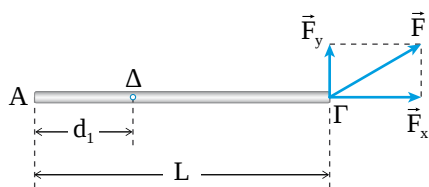
$$L = d_1 + d + d_2 \quad \text{ή} \quad d_2 = L - (d_1 + d)$$

$$\text{ή} \quad d_2 = \frac{L}{4}.$$

30. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες: στη συνιστώσα $\vec{F}_x$ της οποίας ο φορέας ταυτίζεται με τη ράβδο ΑΓ και στη συνιστώσα $\vec{F}_y$ που είναι κάθετη στη ράβδο ΑΓ. Το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο Α δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_1 = F_y L \quad \text{ή} \quad \tau_1 = F \eta \mu \phi L \quad \text{ή} \quad \tau_1 = \frac{1}{2} FL \quad (1).$$



Το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο Δ δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_2 = F_y (L - d_1) \quad \text{ή} \quad \tau_2 = F \eta \mu \phi \frac{2L}{3}$$

$$\text{ή} \quad \tau_2 = \frac{1}{3} FL \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad \tau_2 = \frac{2}{3} \tau_1.$$

ΘΕΜΑΤΑ Γ

31. Αν θεωρήσουμε ως θετικές τις ροπές των δυνάμεων που τείνουν να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

α. $\tau_{F_1} = +F_1 \frac{L}{2}$ ή $\tau_{F_1} = +1 \text{ Nm}$,

$\tau_{F_2} = +F_2 \left(\frac{L}{2} - d \right)$ ή $\tau_{F_2} = +1,2 \text{ Nm}$ και

$\tau_{F_3} = -F_3 \frac{L}{2}$ ή $\tau_{F_3} = -0,5 \text{ Nm}$.

β. Είναι: $\Sigma\tau = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3}$ ή $\Sigma\tau = +1,7 \text{ Nm}$.

γ. Είναι: $\tau'_{F_1} = 0$, $\tau'_{F_2} = +F_2(L-d)$

ή $\tau'_{F_2} = +3,2 \text{ Nm}$ και $\tau'_{F_3} = -F_3L$

ή $\tau'_{F_3} = -1 \text{ Nm}$.

Είναι: $\Sigma\tau' = \tau'_{F_1} + \tau'_{F_2} + \tau'_{F_3}$ ή $\Sigma\tau' = +2,2 \text{ Nm}$.

32. Θεωρώντας ως θετικές τις ροπές των δυνάμεων που τείνουν να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

α. Είναι: $\tau_{F_1} = -2 \text{ Nm}$, $\tau_{F_2} = +6 \text{ Nm}$,

$\tau_{F_3} = -4,5 \text{ Nm}$, $\tau_{F_4} = 0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα προκύπτει: $\Sigma\tau_{(K)} = -0,5 \text{ Nm}$.

β. $\tau_{F_1} = 3 \text{ Nm}$, $\tau_{F_2} = 0$,

$\tau_{F_3} = -1,5 \text{ Nm}$, $\tau_{F_4} = 0$.

Επομένως, το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα προκύπτει: $\Sigma\tau_{(M)} = +1,5 \text{ Nm}$.

γ. $\tau_{F_1} = 0$, $\tau_{F_2} = +3,6 \text{ Nm}$,

$\tau_{F_3} = -3,3 \text{ Nm}$, $\tau_{F_4} = 0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα προκύπτει: $\Sigma\tau_{(Z)} = +0,3 \text{ Nm}$.

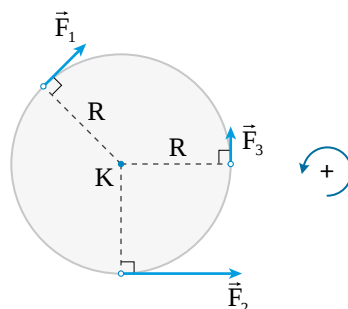
33. α. Είναι:

$\tau_{F_1} = -F_1R$ ή $\tau_{F_1} = -20 \text{ Nm}$,

$\tau_{F_2} = +F_2R$ ή $\tau_{F_2} = +40 \text{ Nm}$,

$\tau_{F_3} = +F_3R$ ή $\tau_{F_3} = +10 \text{ Nm}$,

$\tau_w = 0$.



β. Είναι: $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_w$

ή $\Sigma\tau_{(K)} = +30 \text{ Nm}$.

γ. Επειδή η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής των δυνάμεων που ασκούνται στον δίσκο είναι θετική, ο δίσκος περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

34. α. Θεωρώντας ως θετικές τις ροπές των δυνάμεων που τείνουν να περιστρέψουν τον τροχό αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$\tau_{F_1} = +F_1 R \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} = +5 \text{ Nm},$$

$$\tau_{F_2} = +F_2 (K\Lambda) \quad \text{ή} \quad \tau_{F_2} = +1,2 \text{ Nm},$$

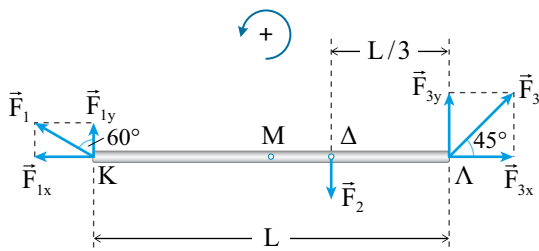
$$\tau_{F_3} = -F_3 (KN) \quad \text{ή} \quad \tau_{F_3} = +10 \text{ Nm}.$$

β. Το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(K)} = +3,2 \text{ Nm}.$$

γ. Επειδή η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής των δυνάμεων που ασκούνται στον τροχό είναι θετική, ο τροχός περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

35. α.



Είναι:

$$\begin{aligned}\tau_{F_1} &= \tau_{F_{1y}} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} = -F_{1y} \frac{L}{2} \\ \text{ή} \quad \tau_{F_1} &= -F_1 \sin 60^\circ \cdot \frac{L}{2} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} = -15 \text{ Nm}, \\ \tau_{F_2} &= -F_2 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) \quad \text{ή} \quad \tau_{F_2} = -4 \text{ Nm}, \\ \tau_{F_3} &= \tau_{F_{3y}} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_3} = +F_{3y} \frac{L}{2} \\ \text{ή} \quad \tau_{F_3} &= +F_3 \sin 45^\circ \cdot \frac{L}{2} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_3} = +60 \text{ Nm}.\end{aligned}$$

β. Είναι: $\Sigma \tau_{(M)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3}$

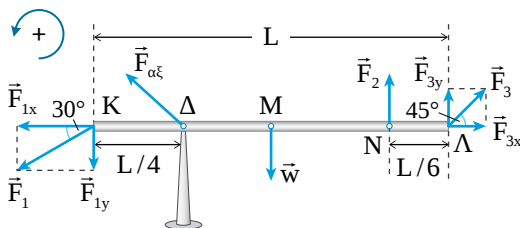
$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(M)} = +41 \text{ Nm}.$$

γ. Είναι: $\Sigma \tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3}$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(K)} = 0 - F_2 \left(L - \frac{L}{3} \right) + F_3 \sin 45^\circ \cdot L$$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(K)} = +104 \text{ Nm}.$$

36. α.



$$\text{Είναι: } \tau_{F_1} = \tau_{F_{1y}} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} = +F_1 \sin 30^\circ \cdot \frac{L}{4}$$

$$\text{ή} \quad \tau_{F_1} = +7,5 \text{ Nm}, \quad \tau_w = -w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right)$$

$$\text{ή} \quad \tau_w = -mg \frac{L}{4} \quad \text{ή} \quad \tau_w = -9 \text{ Nm},$$

$$\tau_{F_2} = +F_2 \left(L - \frac{L}{4} - \frac{L}{6} \right) \quad \text{ή} \quad \tau_{F_2} = +F_2 \frac{7L}{12}$$

$$\text{ή} \quad \tau_{F_2} = +17,5 \text{ Nm} \text{ και}$$

$$\tau_{F_3} = \tau_{F_{3y}} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_3} = +F_3 \sin 45^\circ \left(L - \frac{L}{4} \right)$$

$$\text{ή} \quad \tau_{F_3} = +11,25 \text{ Nm}.$$

β. Είναι: $\Sigma \tau_{(\Delta)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_{F_{ax}}$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(\Delta)} = +27,25 \text{ Nm}.$$

γ. Εφόσον η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής είναι θετική, η ράβδος θα στραφεί αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

37. α. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το μέτρο της συνισταμένης ροπής των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς το μέσον M της ράβδου είναι: $|\Sigma \tau_{(M)}| = 5 \text{ Nm}$. Αν θεωρήσουμε ως θετική

φορά την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής των δύο δυνάμεων ως προς το μέσον M της ράβδου είναι:

$$\Sigma \tau_{(M)} = -F_1 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - F_2 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right)$$

$$\text{ή } \Sigma \tau_{(M)} = -F_1 \frac{L}{6} - F_2 \frac{L}{4}$$

$$\text{ή } \Sigma \tau_{(M)} = -F_1 \left(\frac{L}{4} + \frac{L}{6} \right)$$

$$\text{ή } \Sigma \tau_{(M)} = -\frac{5}{12} F_1 L \quad \text{ή } |\Sigma \tau_{(M)}| = \frac{5}{12} F_1 L$$

$$\text{ή } F_1 = \frac{12 |\Sigma \tau_{(M)}|}{5L} \quad \text{ή } F_1 = 6 \text{ N.}$$

β. Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς το σημείο K υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma \tau_{(K)} = +F_1 \frac{L}{3} - F_2 \left(L - \frac{L}{4} \right)$$

$$\text{ή } \Sigma \tau_{(K)} = +\frac{1}{3} F_1 L - \frac{3}{4} F_1 L \quad \text{ή } \Sigma \tau_{(K)} = -\frac{5}{12} F_1 L$$

$$\text{ή } |\Sigma \tau_{(K)}| = \frac{5}{12} F_1 L \quad \text{ή } |\Sigma \tau_{(K)}| = 5 \text{ Nm.}$$

γ. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, οπότε η συνισταμένη ροπή τους είναι ανεξάρτητη από το σημείο του επιπέδου τους ως προς το οποίο υπολογίζεται. Επομένως, είναι: $|\Sigma \tau_{(A)}| = |\Sigma \tau_{(M)}|$ ή $|\Sigma \tau_{(A)}| = 5 \text{ Nm.}$

δ. Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων δεν επηρεάζει τη μεταφορική κίνηση της ράβδου, καθώς η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ίση με μηδέν ($\Sigma \vec{F} = \vec{0}$).

Επομένως, σωστή επιλογή είναι η i: ράβδος θα εκτελέσει περιστροφική κίνηση γύρω από κα-

τακόρυφο νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της M.

Τα σημεία της ράβδου έχουν κάθε χρονική στιγμή, λόγω της περιστροφικής κίνησης της ράβδου, γραμμικές ταχύτητες. Έστω ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με ω .

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου A τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_A = \omega \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) \quad \text{ή } v_A = \frac{1}{6} \omega L \quad (1).$$

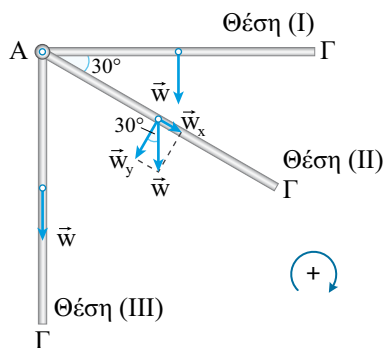
Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου B τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_B = \omega \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) \quad \text{ή } v_B = \frac{1}{4} \omega L \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{2}{3} \quad \text{ή } v_B = 1,5 v_A \quad \text{ή } v_B = 6 \text{ m/s.}$$

38. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της δεν δημιουργεί ροπή. Επομένως, η μοναδική δύναμη που δημιουργεί ροπή είναι το βάρος της ράβδου.



α. Στη θέση (I) ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = w \frac{L}{2} \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = mg \frac{L}{2}$$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = 10 \text{ Nm.}$$

β. Στη θέση (II) ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = w_y \frac{L}{2} \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = mg \sin 30^\circ \cdot \frac{L}{2}$$

$$\text{ή} \quad \Sigma \tau_{(A)} = 5\sqrt{3} \text{ Nm.}$$

γ. Στη θέση (III) ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$.

2.4 Ισορροπία στερεού σώματος

ΘΕΜΑΤΑ Α

Α. Θέματα πολλαπλής επιλογής

10. δ	11. γ	12. β	13. α
14. γ	15. δ	16. δ	17. δ

Β. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

18.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
19.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ

ΘΕΜΑΤΑ Β

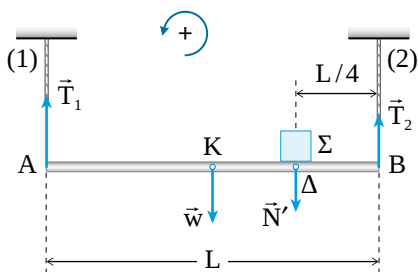
20. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_1.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Κ, οι τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ από τα νήματα (1) και (2) αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{N}'$ από το σώμα Σ. Είναι:

$$N' = N \quad \text{ή} \quad N' = w_1.$$



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T_1} + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} - N' \left(L - \frac{L}{4} \right) + T_2 L = 0$$

$$\text{ή} \quad -w \frac{L}{2} - w_1 \frac{3L}{4} + T_2 L = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = \frac{7}{8} w.$$

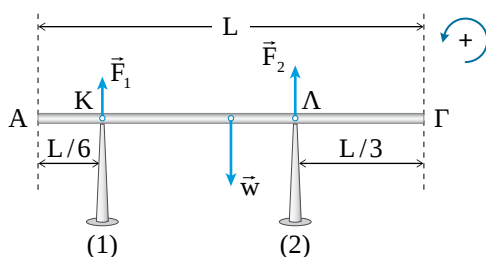
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 + T_2 - w - N' = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1 + T_2 - w - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = \frac{5}{8} w.$$

21. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_w = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + F_2 \left(L - \frac{L}{6} - \frac{L}{3} \right) - w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{6} \right) = 0$$

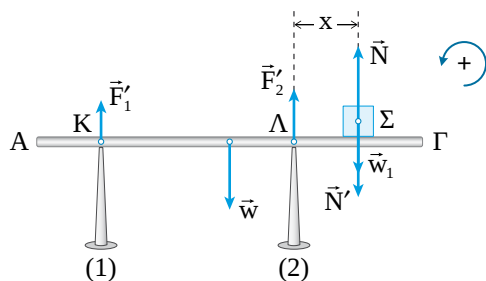
$$\text{ή} \quad F_2 = \frac{2w}{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1 + F_2 - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = \frac{w}{3} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$

$$\text{ή } N - w_1 = 0 \text{ ή } N = w_1 \text{ ή } N = w.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{N}'$ που ασκείται στη ράβδο από το σώμα Σ είναι: $N' = N$ ή $N' = w$.

Έστω x η μέγιστη απόσταση δεξιά του σημείου Λ της ράβδου όπου μπορούμε να τοποθετήσουμε το σώμα Σ, ώστε η ράβδος να μην ανατραπεί. Στην περίπτωση αυτήν, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το υποστήριγμα (1) είναι: $F'_1 = 0$.

$$\text{Ισχύει: } \Sigma \tau_{(A)} = 0 \text{ ή } \tau_{F'_1} + \tau_w + \tau_{F'_2} + \tau_{N'} = 0$$

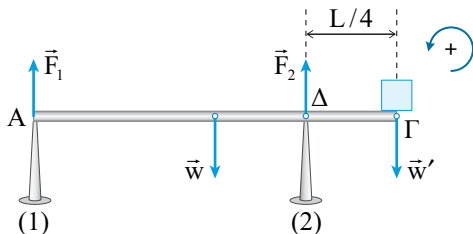
$$\text{ή } 0 + w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) + 0 - N'x = 0$$

$$\text{ή } w \frac{L}{6} = wx \text{ ή } x = \frac{L}{6}.$$

Επειδή $x < \frac{L}{3}$, αν το σώμα Σ τοποθετηθεί στο άκρο Γ της ράβδου, η ράβδος θα ανατραπεί.

22. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

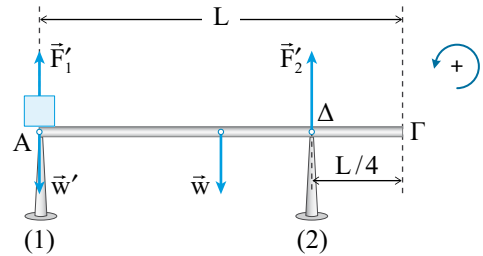
Έστω w' το μέγιστο βάρος ενός σώματος Σ αμελητέων διαστάσεων το οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε στο άκρο Γ της ράβδου, χωρίς η ράβδος να ανατραπεί. Στην περίπτωση αυτήν, η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το υποστήριγμα (1) είναι ίση με μηδέν ($\vec{F}_1 = \vec{0}$).



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{\epsilon \xi \omega \tau(\Delta)} = 0$ ή $\tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} + \tau_{w'} = 0$

$$\text{ή } 0 + w \frac{L}{4} + 0 - w' \frac{L}{4} = 0 \text{ ή } w' = w.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

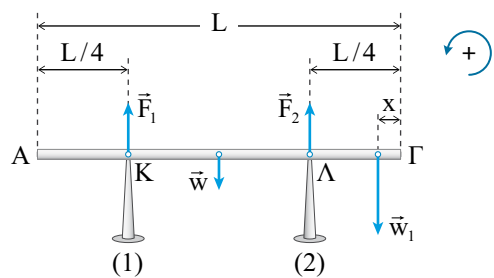


Επειδή το σύστημα των σωμάτων ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{\epsilon \xi \omega \tau(A)} = 0$ ή $\tau_{F'_1} + \tau_{w'} + \tau_w + \tau_{F'_2} = 0$

$$\text{ή } 0 + 0 - w \frac{L}{2} + F'_2 \frac{3L}{4} = 0 \text{ ή } F'_2 = \frac{2}{3} w.$$

23. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Στην περίπτωση αυτήν, η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το υποστήριγμα που είναι τοποθετημένο στο σημείο Κ είναι $\vec{F}_1 = \vec{0}$.



Επειδή το σύστημα δοκός – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{\epsilon \xi \omega \tau(\Lambda)} = 0$ ή $\tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} + \tau_{w_1} = 0$

$$\text{ή } 0 + w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) + 0 - w_1 \left(\frac{L}{4} - x \right) = 0$$

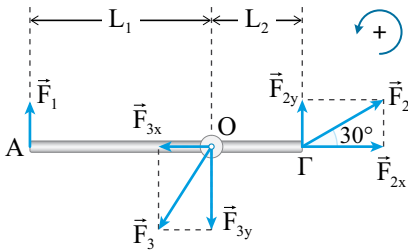
$$\text{ή } x = 0,2L.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $F_1 + F_2 - w - w_1 = 0$
ή $F_2 = 6w$.

24. A. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω $\vec{F}_3$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F_1 L_1 + F_{2y} L_2 + 0 = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 L_1 = F_2 \eta \mu 30^\circ L_2$$

$$\text{ή} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{F_2 \eta \mu 30^\circ}{F_1} \quad \text{ή} \quad \frac{L_1}{L_2} = 2.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α .

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_{2x} - F_{3x} = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_{3x} = F_2 \sigma \nu 30^\circ \quad \text{ή} \quad F_{3x} = 2\sqrt{3}F.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_{2y} - F_{3y} = 0$$

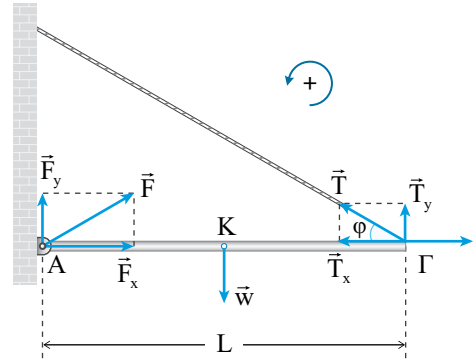
$$\text{ή} \quad F_{3y} = F_1 + F_2 \eta \mu 30^\circ \quad \text{ή} \quad F_{3y} = 3F.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_3$ υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} \quad \text{ή} \quad F_3 = \sqrt{21}F.$$

25. A. Σωστή επιλογή είναι η α .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η τάση $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T_y L = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{w}{2} = T \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad T = w.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α .

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x - T_x = 0$$

$$\text{ή} \quad F_x = T \sigma \nu \phi \quad \text{ή} \quad F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} w.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

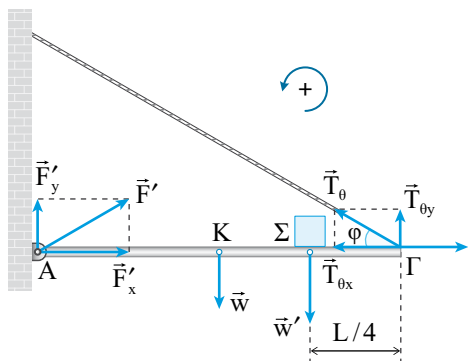
$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_y + T_y - w = 0$$

$$\text{ή} \quad F_y = w - T \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_y = \frac{w}{2}.$$

Συνεπώς, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ προκύπτει:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = w.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η β.



Έστω $\bar{w}'$ το μέγιστο βάρος ενός πολύ μικρού σώματος Σ που μπορούμε να τοποθετήσουμε σε απόσταση $d = \frac{L}{4}$ από το άκρο Γ της ράβδου, ώστε να μην κοπεί το νήμα. Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

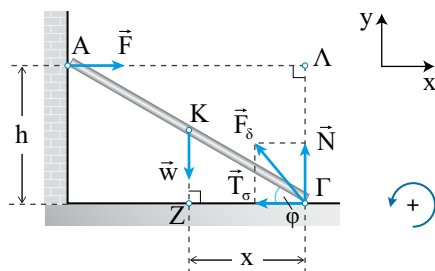
$$\Sigma \tau_{\varepsilon \zeta \omega \tau(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_w + \tau_{w'} + \tau_{T_\theta} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} - w' \frac{3L}{4} + T_{\theta y} L = 0$$

$$\text{ή} \quad -w \frac{L}{2} - w' \frac{3L}{4} + 2w \eta \mu \phi L = 0 \quad \text{ή} \quad w' = \frac{2w}{3}.$$

26. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\bar{w}$ στο μέσον της Κ, η δύναμη $\bar{F}$ από τον λείο κατακόρυφο τοίχο και η δύναμη $\bar{F}_\delta$ από το δάπεδο, η οποία αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες: μία οριζόντια συνιστώσα που είναι η στατική τριβή $\bar{T}_{\sigma x}$ και μία κατακόρυφη συνιστώσα που είναι η κάθετη δύναμη $\bar{N}$ από το δάπεδο.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(I)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_\delta} + \tau_F + \tau_w = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - F(\Gamma\Lambda) + w(\Gamma Z) = 0 \quad \text{ή} \quad -Fh + wx = 0$$

$$\text{ή} \quad FL \eta \mu \phi = w \frac{L}{2} \sigma \nu \eta \phi \quad \text{ή} \quad F = \frac{\sqrt{3}}{2} w.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \bar{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad T_{\sigma x} = F \quad \text{ή} \quad T_{\sigma x} = \frac{\sqrt{3}}{2} w.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = w.$$

Για το μέτρο της στατικής τριβής ισχύει:

$$T_{\sigma x} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{\sigma x}}{N} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ή} \quad \mu_{s(\min)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(I)} = 0 \quad \text{ή} \quad -Fh + wx = 0$$

$$\text{ή} \quad FL \eta \mu \theta = w \frac{L}{2} \sigma \nu \eta \theta \quad \text{ή} \quad F = \frac{w}{2} \frac{\sigma \nu \eta \theta}{\eta \mu \theta}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_{\sigma x} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma x} = \frac{w}{2} \frac{\sigma \nu \eta \theta}{\eta \mu \theta}$$

$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w.$$

Για το μέτρο της στατικής τριβής ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad \frac{w}{2} \frac{\sin\theta}{\eta\mu\theta} \leq \mu_s w$$

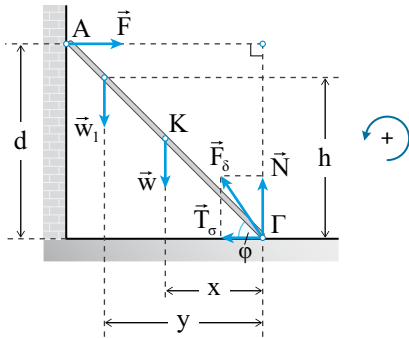
$$\text{ή} \quad \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} \geq \frac{1}{2\mu_s} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\theta \geq 1 \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\theta_{\min} = 1$$

$$\text{ή} \quad \theta_{\min} = 45^\circ.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο, η δύναμη $\vec{F}_\delta$ από το δάπεδο που αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, τη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ και την κάθετη προς το δάπεδο δύναμη $\vec{N}$, και η δύναμη που ασκείται από το παιδί, η οποία είναι ίση με το βάρος του $\vec{w}_1$.

Επειδή η σκάλα είναι έτοιμη να ολισθήσει, ισχύει: $T_{\sigma\tau} = T_{op}$ ή $T_{\sigma\tau} = \mu_s N$ ή $T_{\sigma\tau} = 0,5N$ (1).



Επειδή η σκάλα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (3).$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w + w_1 \quad \text{ή} \quad N = 4w.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau} = 2w.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_\sigma \quad \text{ή} \quad F = 2w.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \tau_{(I)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_\delta} + \tau_F + \tau_w + \tau_{w_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - Fd + wx + w_1 y = 0$$

$$\text{ή} \quad -FL\eta\mu\phi + w \frac{L}{2} \sin\phi + w_1 y = 0$$

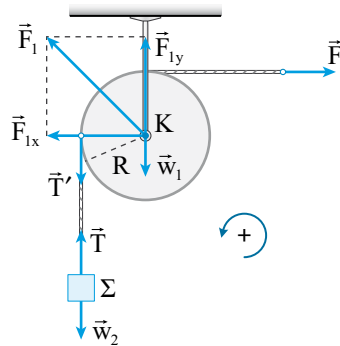
$$\text{ή} \quad y = 0,25\sqrt{2}L.$$

Συνεπώς, το μέγιστο ύψος h πάνω από το οριζόντιο δάπεδο στο οποίο μπορεί να ανέβει το παιδί υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{h}{y} \quad \text{ή} \quad h = y \quad \text{ή} \quad h = 0,25\sqrt{2}L.$$

28. Α. Σωστή επιλογή είναι η β .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα τροχαλία – σώμα Σ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T - w_2 = 0 \quad \text{ή} \quad T = w \quad (1).$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_1} + \tau_{F_1} + \tau_F + \tau_{T'} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 - FR + T'R = 0 \quad \text{ή} \quad F = T' \quad (2).$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει: $T' = T$.

Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:
 $F = T$ ή $F = w$.

B. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω $\vec{F}_1$ η δύναμη που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (4).$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$F_{1x} - F = 0 \quad \text{ή} \quad F_{1x} = w.$$

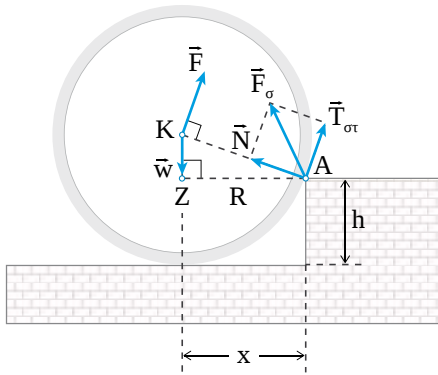
Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$F_{1y} - T' - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_{1y} = T + w_1 \quad \text{ή} \quad F_{1y} = 3w.$$

Συνεπώς, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ είναι:

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} \quad \text{ή} \quad F_1 = \sqrt{10}w.$$

29. Σωστή απάντηση είναι η β .



Για να υπερπηδήσει ο τροχός το σκαλοπάτι, θα πρέπει το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο A να είναι μεγαλύτερο ή οριακά ίσο με το μέτρο της ροπής του βάρους του $\vec{w}$ ως προς το ίδιο σημείο. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει: $|\tau_{F(A)}| \geq |\tau_{w(A)}|$ ή $FR \geq wx$ (1).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο KZA του παραπάνω σχήματος προκύπτει:

$$R^2 = x^2 + (R - h)^2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\sqrt{7}}{4}R \quad (2).$$

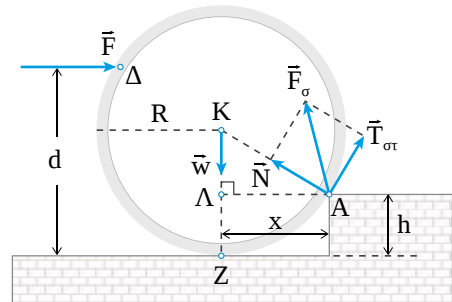
Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$FR \geq w \frac{\sqrt{7}}{4}R \quad \text{ή} \quad F \geq \frac{\sqrt{7}}{4}w.$$

Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ είναι: $F_{\min} = \frac{\sqrt{7}}{4}w$.

30. Σωστή επιλογή είναι η β .

Για να υπερπηδήσει ο τροχός το σκαλοπάτι, πρέπει το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο επαφής A του τροχού με το σκαλοπάτι να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής του βάρους του τροχού ως προς το ίδιο σημείο.



Δηλαδή, πρέπει:

$$|\tau_{F(A)}| > |\tau_{w(A)}| \quad \text{ή} \quad F(d - h) > wx \quad (1).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΑ, έχουμε:

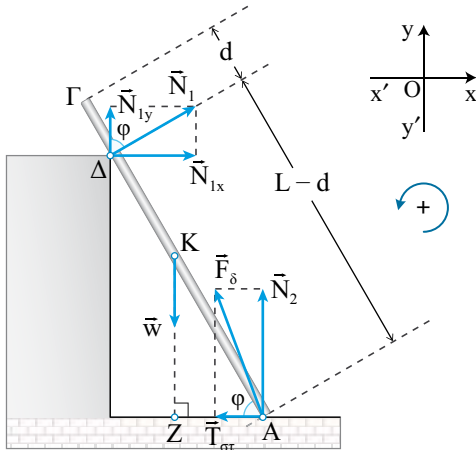
$$R^2 = x^2 + (R - h)^2 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$$

$$\text{ή} \quad x = \sqrt{h(2R - h)} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}R \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $FR > w \frac{\sqrt{3}}{2} R$ ή $F > \frac{\sqrt{3}}{2} w$.

31. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{N}_1$ από το σκαλοπάτι, η οποία είναι κάθετη στη ράβδο (το σκαλοπάτι είναι λείο) και η δύναμη $\vec{F}_\delta$ από το δάπεδο που αναλύεται σε μια οριζόντια συνιστώσα $\vec{T}_{\sigma\tau}$ (στατική τριβή) και σε μια κάθετη στο δάπεδο συνιστώσα $\vec{N}_2$.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N_1} + \tau_w + \tau_{F_\delta} = 0$$

$$\text{ή} \quad -N_1(L-d) + w(AZ) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad w \frac{L}{2} \sin \varphi = N_1 \frac{5L}{6} \quad \text{ή} \quad N_1 = 0,3w.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), προκύπτει: $N_{1x} - T_{\sigma\tau} = 0$

$$\text{ή} \quad N_{1x} = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad N_1 \eta \mu \varphi = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 0,15\sqrt{3}w.$$

Από τη σχέση (2), προκύπτει:

$$N_{1y} + N_2 - w = 0 \quad \text{ή} \quad N_2 = w - N_{1\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

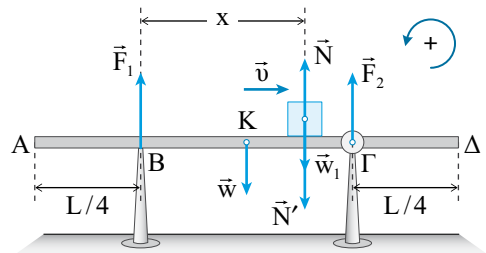
$$\text{ή} \quad N_2 = 0,85w.$$

Για το μέτρο της στατικής τριβής, ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N_2 \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N_2}$$

$$\text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{0,15\sqrt{3}w}{0,85w} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{3\sqrt{3}}{17}.$$

32. Σωστή επιλογή είναι η γ.



Ο κύβος κατά τη διάρκεια της κίνησής του πάνω στη ράβδο δέχεται τη δύναμη του βάρους του $\vec{w}_1$ και την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_1 \quad \text{ή} \quad N = mg \quad \text{ή} \quad N = 2Mg.$$

Η ράβδος δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα που έχουν τοποθετηθεί στα σημεία της B και Γ αντίστοιχα, το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K και την κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ από τον κύβο ($\vec{N}' = -\vec{N}$).

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t ο κύβος έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά x, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(I)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή } -F_1 \frac{L}{2} + w \frac{L}{4} + N' \left(\frac{L}{2} - x \right) = 0$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} F_1 L = \frac{1}{4} MgL + 2Mg \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$\text{ή } F_1 = 2,5Mg - 4Mg \frac{x}{L} \quad (1).$$

Η ράβδος ανατρέπεται όταν η δύναμη που δέχεται από το υποστήριγμα που έχει τοποθετηθεί στο σημείο Β γίνει ίση με μηδέν ($\vec{F}_1 = \vec{0}$). Επομένως από τη σχέση (1) για $F_1 = 0$, προκύ-

$$\text{πτει: } 2,5Mg - 4Mg \frac{x}{L} = 0 \quad \text{ή } x = \frac{5}{8}L.$$

Επειδή ο κύβος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου v πάνω στη ράβδο, η χρονική στιγμή t_1 στην οποία ανατρέπεται η ράβδος υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \frac{x}{t_1}$ ή $t_1 = \frac{x}{v}$

$$\text{ή } t_1 = \frac{5L}{8v}.$$

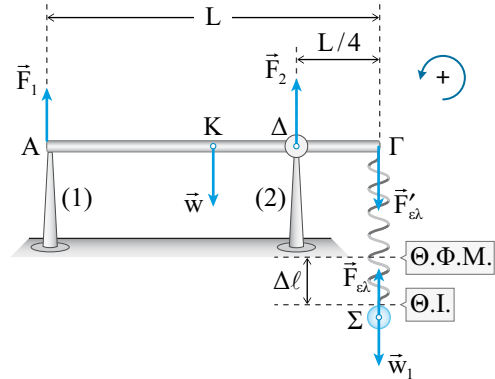
33. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$. Επειδή το σώμα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή } w_1 = F_{ελ} \quad \text{ή } F_{ελ} = \frac{Mg}{2}.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: η δύναμη $\vec{F}_1$ από το υποστήριγμα (1), η δύναμη $\vec{F}_2$ από το υποστήριγμα (2), το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Κ και η δύναμη $\vec{F}'_{ελ}$ από το ελατήριο. Για τις δυνάμεις $\vec{F}_{ελ}$ και $\vec{F}'_{ελ}$, ισχύει:

$$\vec{F}'_{ελ} = -\vec{F}_{ελ} \quad \text{ή } F'_{ελ} = F_{ελ} \quad \text{ή } F'_{ελ} = \frac{Mg}{2} \quad (1).$$



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \quad \text{ή } \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} + \tau_{F'_{ελ}} = 0$$

$$\text{ή } -F_1 \left(L - \frac{L}{4} \right) + w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) + 0 - F'_{ελ} \frac{L}{4} = 0$$

ή, λόγω της σχέσης (1)

$$\frac{3}{4} F_1 L = \frac{1}{4} MgL - \frac{1}{8} MgL \quad \text{ή } F_1 = \frac{Mg}{6}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η ράβδος ανατρέπεται, όταν η δύναμη από το υποστήριγμα (1) γίνει ίση με μηδέν ($\vec{F}_1 = \vec{0}$). Έστω $\vec{w}_1$ το μέγιστο βάρος ενός σώματος Σ' που μπορούμε να στερεώσουμε στο κάτω άκρο του ελατηρίου, ώστε η ράβδος να μην ανατραπεί. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \quad \text{ή } \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F'_{ελ}} + \tau_w = 0$$

$$\text{ή } 0 + 0 - F'_{ελ} \frac{L}{4} + w \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) = 0$$

$$\text{ή } \frac{F'_{ελ} L}{4} = \frac{MgL}{4} \quad \text{ή } F'_{ελ} = Mg.$$

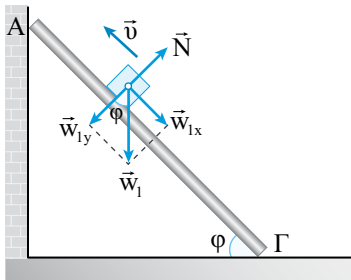
Επειδή το σώμα Σ' ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή } w_1 = F_{ελ} \quad \text{ή } w_1 = F'_{ελ}$$

$$\text{ή } w_1 = Mg.$$

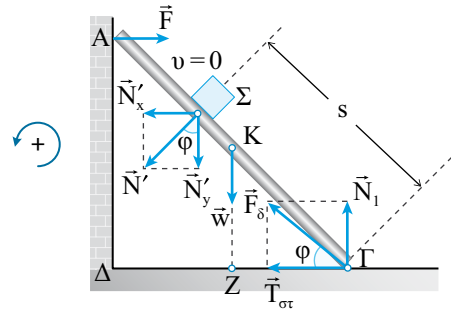
34. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημειακό σώμα Σ κατά τη διάρκεια της κίνησής του προς το άκρο Α της ράβδου είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}_1$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{w}_{1x}$ και $\vec{w}_{1y}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Είναι: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N = w_{1y}$ ή $N = mg \sin \varphi$
ή $N = Mg \sin \varphi$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ προς το άκρο Α της ράβδου είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Κ, η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο, η δύναμη $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) από το σώμα Σ και η δύναμη $\vec{F}_\delta$ από το δάπεδο που αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, την κάθετη προς το δάπεδο δύναμη $\vec{N}_1$ και τη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{N}'$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{N}'_x$ και $\vec{N}'_y$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} N_1 - N'_y - w &= 0 \quad \text{ή} \quad N_1 = N' \sin \varphi + w \\ \text{ή} \quad N_1 &= N \sin \varphi + w \quad \text{ή} \quad N_1 = Mg \sin^2 \varphi + Mg \\ \text{ή} \quad N_1 &= \frac{7}{4} Mg. \end{aligned}$$

Έστω s το διάστημα το οποίο μπορεί να διανύσει το σώμα Σ ανερχόμενο προς το άκρο Α της ράβδου, χωρίς η ράβδος να ολισθήσει.

Όταν η ράβδος είναι έτοιμη να ολισθήσει,

$$\begin{aligned} \text{ισχύει: } T_{\sigma\tau} &= T_{op} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = \mu_s N_1 \\ \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{7}{4} Mg \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = \frac{7}{8} \sqrt{3} Mg. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $F - T_{\sigma\tau} - N'_x = 0$

$$\text{ή} \quad F = T_{\sigma\tau} + N'_x \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F = \frac{9}{8} \sqrt{3} Mg.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(I)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{N'} + \tau_w + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{N_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F(\Delta\Delta) + N's + w(\Gamma Z) + 0 + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad N's = FL \eta \mu \varphi - Mg \frac{L}{2} \sin \varphi$$

$$\text{ή} \quad s = \frac{FL \eta \mu \varphi - \frac{1}{2} Mg L \sin \varphi}{N} \quad \text{ή} \quad s = \frac{5}{8} L.$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της αρχικής ταχύτητας $\bar{v}_{0(\max)}$ με την οποία μπορούμε να εκτοξεύσουμε το σώμα Σ από το άκρο Γ της ράβδου, ώστε η ράβδος να μην ολισθήσει κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ πάνω σε αυτήν είναι αυτή για την οποία στο τέλος του διαστήματος s το σώμα Σ ακινητοποιείται στιγμιαία. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ από τη χρονική στιγμή $t=0$ έως τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_N$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}mv_{0(\max)}^2 = -w_{1x}s + 0$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_{0(\max)}^2 = mgh_{\text{μφς}} \quad \text{ή } v_{0(\max)} = \sqrt{2gh_{\text{μφς}}}$$

$$\text{ή } v_{0(\max)} = \sqrt{\frac{5}{8}gL}.$$

35. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\bar{w}_1$ και η τάση $\bar{T}_2$ από το νήμα (2). Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή } T_2 = w_1 \quad \text{ή } T_2 = \frac{Mg}{4}.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο ομοαξονικών κυλίνδρων είναι: η τάση $\bar{T}'_2$ από το νήμα (2), η τάση $\bar{T}'_1$ από το νήμα (1), το βάρος του $\bar{w}_2$ και η δύναμη $\bar{F}_{\alpha\chi}$ από τον άξονα περιστροφής του.

Για τα μέτρα των τάσεων $\bar{T}'_2$ και $\bar{T}'_1$ ισχύει:

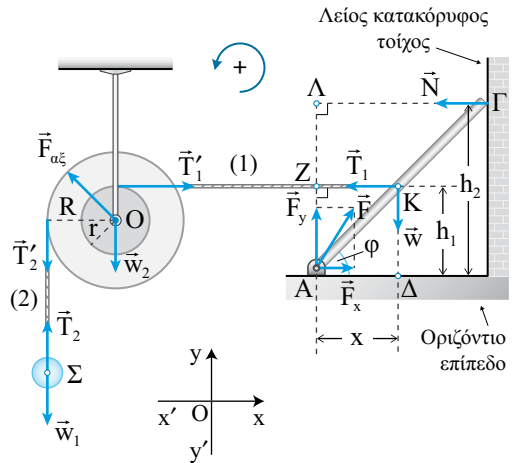
$$T'_2 = T_2 \quad \text{ή } T'_2 = \frac{Mg}{4}.$$

Επειδή το σύστημα των δύο ομοαξονικών κυλίνδρων ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή } \tau_{T'_2} + \tau_{w_2} + \tau_{T'_1} + \tau_{F_{\alpha\chi}} = 0$$

$$\text{ή } T'_2 R + 0 - T'_1 r + 0 = 0 \quad \text{ή } T'_2 R = T'_1 r$$

$$\text{ή } T'_1 = 2T'_2 \quad \text{ή } T'_1 = \frac{Mg}{2}.$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\bar{w}$ στο μέσον της K , η τάση $\bar{T}_1$ από το νήμα (1), η δύναμη $\bar{N}$ από τον τοίχο και η δύναμη $\bar{F}$ από την άρθρωση, η οποία αναλύεται στις συνιστώσες $\bar{F}_x$ και $\bar{F}_y$ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Για τα μέτρα των τάσεων $\bar{T}'_1$ και $\bar{T}'_1$ ισχύει:

$$T_1 = T'_1 \quad \text{ή } T_1 = \frac{Mg}{2}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{T_1} + \tau_N = 0$$

$$\text{ή } 0 - wx + T_1 h_1 + N h_2 = 0$$

$$\text{ή } -w \frac{L}{2} \sin \varphi + T_1 \frac{L}{2} \eta \mu \varphi + N L \eta \mu \varphi = 0$$

$$\text{ή } N = \frac{w}{2} - \frac{T_1}{2} \quad \text{ή } N = \frac{Mg}{2} - \frac{Mg}{4} \quad \text{ή } N = \frac{Mg}{4}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \bar{F} = \vec{0} \quad \text{ή } \Sigma F_x = 0 \text{ (1) και } \Sigma F_y = 0 \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1), προκύπτει:

$$F_x - N - T_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = N + T_1$$

$$\text{ή} \quad F_x = \frac{Mg}{4} + \frac{Mg}{2} \quad \text{ή} \quad F_x = \frac{3}{4}Mg.$$

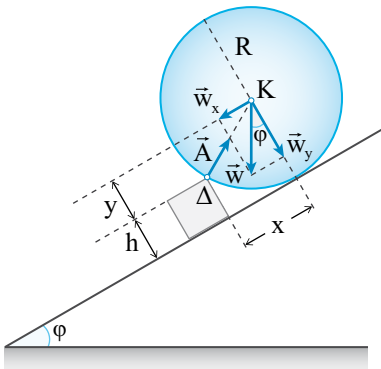
Από τη σχέση (2), προκύπτει:

$$F_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = w \quad \text{ή} \quad F_y = Mg.$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 1,25Mg.$$

36. Σωστή επιλογή είναι η β .



Για να υπερπηδήσει η σφαίρα το εμπόδιο, πρέπει να ισχύει:

$$|\tau_{w_{x(\Delta)}}| \geq |\tau_{w_{y(\Delta)}}| \quad \text{ή} \quad w_x \cdot y \geq w_y \cdot x$$

$$\text{ή} \quad w_x (R - h) \geq w_y x$$

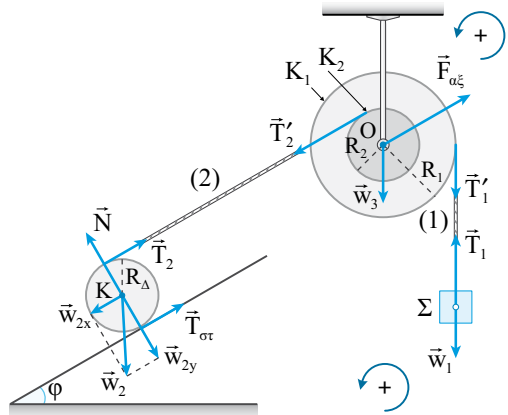
$$\text{ή} \quad w \eta \mu \phi (R - h) \geq w \sigma \nu \phi \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$$

$$\text{ή} \quad \epsilon \phi \phi \geq \frac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$$

$$\text{ή} \quad \epsilon \phi \phi \geq \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \epsilon \phi \phi_{\min} = \sqrt{3}.$$

37. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δίσκος – τροχαλία – σώμα Σ.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = w_1 \quad \text{ή} \quad T_1 = mg.$$

$$\text{Είναι:} \quad T'_1 = T_1 \quad \text{ή} \quad T'_1 = mg.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T'_2} + \tau_{T_1} + \tau_{F_{αξ}} + \tau_{w_3} = 0$$

$$\text{ή} \quad T'_2 R_2 - T'_1 R_1 + 0 + 0 = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 R_2 = T'_1 R_1$$

$$\text{ή} \quad T'_2 = 2T'_1 \quad \text{ή} \quad T'_2 = 2mg.$$

$$\text{Είναι:} \quad T_2 = T'_2 \quad \text{ή} \quad T_2 = 2mg.$$

Επειδή ο δίσκος Δ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_2} + \tau_N + \tau_{T_2} + \tau_{T_{στ}} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 - T_2 R_\Delta + T_{στ} R_\Delta = 0 \quad \text{ή} \quad T_{στ} = T_2$$

$$\text{ή} \quad T_{στ} = 2mg$$

Επειδή ο δίσκος Δ ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$w_{2x} - T_2 - T_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{ή} \quad Mg\eta\mu\phi = 4mg$$

$$\text{ή} \quad M = 8m.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$N - w_{2y} = 0 \quad \text{ή} \quad N = Mg\sigma\upsilon\eta\phi$$

$$\text{ή} \quad N = 4\sqrt{3}mg.$$

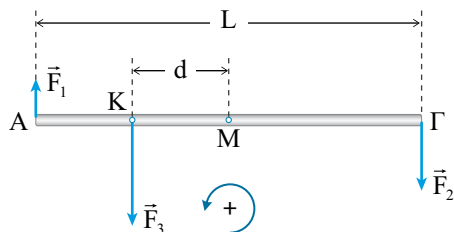
Για το μέτρο της στατικής τριβής, ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\text{op}} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N}$$

$$\text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{2mg}{4\sqrt{3}mg} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ή} \quad \mu_{s(\min)} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

38. α.

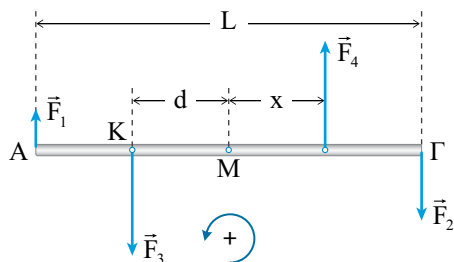


Είναι: $\Sigma \tau_{(M)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3}$

ή $\Sigma \tau_{(M)} = -F_1 \frac{L}{2} - F_2 \frac{L}{2} + F_3 d$

ή $\Sigma \tau_{(M)} = -10 \text{ Nm}$.

β. Για να ισορροπήσει η ράβδος, πρέπει να ασκηθεί κάθετα στη ράβδο η οριζόντια δύναμη $\vec{F}_4$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F = 0$

ή $F_1 + F_4 - F_2 - F_3 = 0$ ή $F_4 = 50 \text{ N}$.

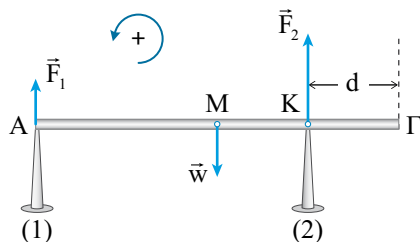
γ. Έστω x η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}_4$ από το μέσον M της ράβδου.

Ισχύει: $\Sigma \tau_{(M)} = 0$ ή $\tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_{F_4} = 0$

ή $-10 \text{ Nm} + \tau_{F_4} = 0$ ή $\tau_{F_4} = 10 \text{ Nm}$

ή $F_4 x = 10 \text{ Nm}$ ή $x = 0,2 \text{ m}$.

39. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M και οι κατακόρυφες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_w = 0$

$0 + F_2(L - d) - w \frac{L}{2} = 0$ ή $F_2 = 20 \text{ N}$.

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή

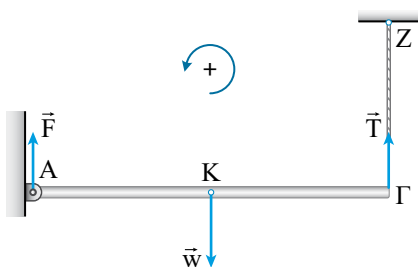
$F_1 + F_2 - w = 0$ ή $F_1 = 10 \text{ N}$.

40. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα που έχει τη διεύθυνση του νήματος και φορά προς τα πάνω και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Επειδή οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{T}$ είναι κατακόρυφες, η δύναμη $\vec{F}$ θα είναι και αυτή κατακόρυφη. Πράγματι, αν η δύναμη $\vec{F}$ δεν ήταν κατακόρυφη, τότε θα μπορούσε να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: τη δύναμη $\vec{F}_x$ που έχει τη διεύθυνση της ράβδου και τη δύναμη $\vec{F}_y$ που είναι κάθετη στη ράβδο. Επειδή η ράβδος ισορροπεί και δεν υπάρ-

χει άλλη δύναμη στον άξονα $x'x$ εκτός από τη συνιστώσα δύναμη $\vec{F}_x$, ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = 0.$$

Επομένως, η δύναμη $\vec{F}$ είναι κατακόρυφη.



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + TL = 0 \quad \text{ή} \quad T = \frac{Mg}{2}$$

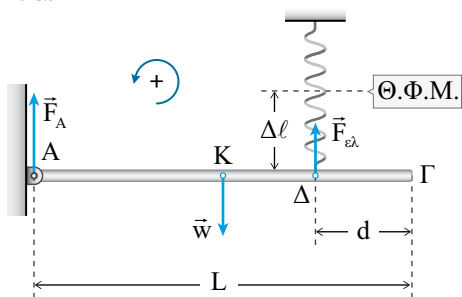
$$\text{ή} \quad T = 15 \text{ N}.$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F + T - w = 0$$

$$\text{ή} \quad F = Mg - T \quad \text{ή} \quad F = 15 \text{ N}.$$

41. α.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_w + \tau_{F_{ελ}} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + F_{ελ} (L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ} = \frac{wL}{2(L-d)} \quad \text{ή} \quad F_{ελ} = 160 \text{ N}.$$

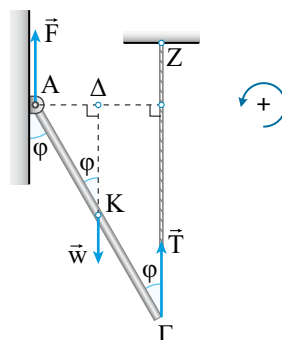
β. Είναι: $F_{ελ} = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 1,6 \text{ m}.$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_A + F_{ελ} = w$$

$$\text{ή} \quad F_A = 80 \text{ N}.$$

42. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Επειδή το βάρος $\vec{w}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος είναι κατακόρυφες, και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση θα είναι επίσης κατακόρυφη.

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$0 - w(A\Delta) + T(AZ) = 0$$

$$\text{ή} \quad TL \eta \mu \phi = w \frac{L}{2} \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad T = \frac{w}{2} \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad T = 50 \text{ N}.$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

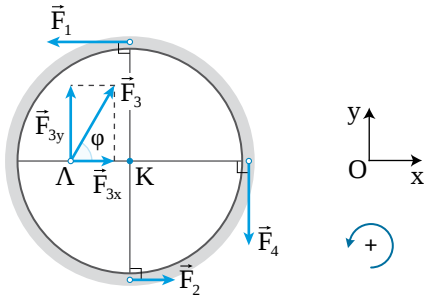
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F - w + T = 0$$

$$\text{ή} \quad F = w - T \quad (2) \quad \text{ή} \quad F = 50 \text{ N}.$$

δ. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η τάση του νήματος είναι ανεξάρτητη από τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφη διεύθυνση. Συνεπώς, είναι: $T = 50 \text{ N}.$

Από τη σχέση (2) προκύπτει το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι ξανά $F = 50 \text{ N}$.

43. α.



Επειδή ο τροχός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_2 + F_{3x} - F_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_{3x} = F_1 - F_2$$

$$\text{ή} \quad F_3 \sin \varphi = F_1 - F_2 \quad \text{ή} \quad F_3 = 20 \text{ N}.$$

β. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$F_{3y} - F_4 = 0 \quad \text{ή} \quad F_4 = F_3 \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F_4 = 16 \text{ N}.$$

γ. Επειδή ο τροχός ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

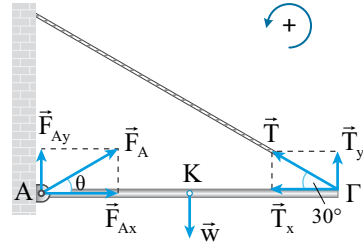
$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_{F_4} = 0$$

$$F_1 R + F_2 R - F_{3y} (K\Lambda) - F_4 R = 0$$

$$\text{ή} \quad F_3 \eta \mu \varphi (K\Lambda) = (F_1 + F_2 - F_4) R$$

$$\text{ή} \quad (K\Lambda) = 0,5 \text{ m}.$$

44. α. Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η τάση $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση. Αναλύουμε την τάση του νήματος στις συνιστώσες $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$ που φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T_y L = 0 \quad \text{ή} \quad T \eta \mu \varphi = \frac{w}{2}$$

$$\text{ή} \quad T = 100 \text{ N}.$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτή είναι ίση με το μηδέν. Συνεπώς, είναι:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

$$\text{Από τη σχέση (1) έχουμε: } F_{Ax} - T_x = 0$$

$$\text{ή} \quad F_{Ax} = T \sin \varphi \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = 50\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$F_{Ay} + T_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = w - T \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή} \quad F_{Ay} = 50 \text{ N}.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση δίνεται από τη σχέση:

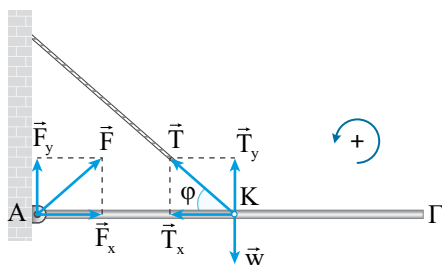
$$F = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = 100 \text{ N}.$$

γ. Έστω θ ή γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Ισχύει:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 30^\circ.$$

45. α. Στο επόμενο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, οι οποίες είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}$. Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{T}$ σε

δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T_y \frac{L}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad T_y = w$$

$$\text{ή} \quad T \eta \mu \phi = Mg \quad \text{ή} \quad T = 20 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_x - T_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T \sigma \nu \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_x = 10\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

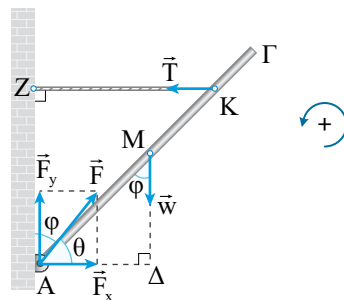
$$F_y + T_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = Mg - T \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_y = 0.$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = F_x \quad \text{ή} \quad F = 10\sqrt{3} \text{ N.}$$

γ. Επειδή $F_y = 0$, η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι **οριζόντια με φορά προς τα δεξιά**.

46. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w(A\Delta) + T(AZ) = 0$$

$$\text{ή} \quad T(AK) \sigma \nu \mu \phi = w \frac{L}{2} \eta \mu \phi$$

$$\text{ή} \quad w = \frac{2T(AK) \sigma \nu \mu \phi}{L \eta \mu \phi} \quad \text{ή} \quad w = 10 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_x - T = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = 5 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$F_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = 10 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 5\sqrt{5} \text{ N.}$$

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Έχουμε:

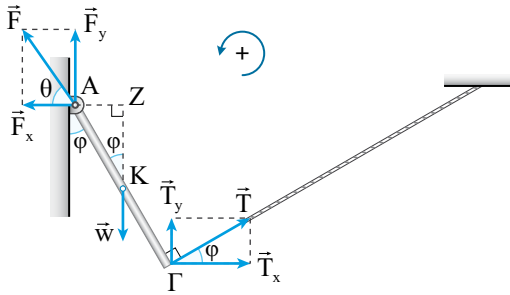
$$\epsilon \phi \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \epsilon \phi \theta = 2.$$

47. α. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w(AZ) + TL \quad \text{ή} \quad TL = w \frac{L}{2} \eta \mu \phi$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{w}{4} \quad \text{ή} \quad T = \frac{Mg}{4} \quad \text{ή} \quad T = 10 \text{ N.}$$



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$T_x = F_x \quad \text{ή} \quad F_x = T \sin \varphi \quad \text{ή} \quad F_x = 5\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$F_y + T_y = w \quad \text{ή} \quad F_y = w - T \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή} \quad F_y = Mg - T \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F_y = 35 \text{ N}.$$

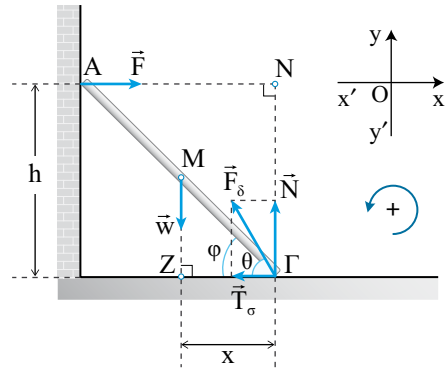
Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 10\sqrt{13} \text{ N}.$$

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta = 7 \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

48. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M, η δύναμη $\vec{F}$ από τον κατακόρυφο τοίχο και η δύναμη $\vec{F}_\delta$ από το οριζόντιο δάπεδο. Επειδή ο κατακόρυφος τοίχος είναι λείος, η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στον τοίχο. Η δύναμη $\vec{F}_\delta$ που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο δάπεδο αναλύεται σε δύο συνιστώσες: μια κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{N}$ και μια οριζόντια συνιστώσα $\vec{T}_{\sigma\tau}$.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτήν είναι ίσο με μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο της. Δηλαδή, είναι: $\Sigma \tau = 0$ (1).

Επιλέγοντας ως σημείο υπολογισμού των ροπών το σημείο Γ, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_w + \tau_F + \tau_{F_\delta} = 0$$

$$\text{ή} \quad +w(\Gamma Z) - F(\Gamma N) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad wx - Fh = 0 \quad \text{ή} \quad FL \eta \mu \varphi = w \frac{L}{2} \sin \varphi$$

$$\text{ή} \quad F = 100\sqrt{3} \text{ N}.$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (3).$$

Από τη σχέση (3), θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = w \quad \text{ή} \quad N = 200 \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2), θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$F - T_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = F \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 100\sqrt{3} \text{ N}.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_\delta$ που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο δάπεδο υπολογίζεται από τη σχέση: $F_\delta = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N^2}$ ή $F_\delta = 100\sqrt{7} \text{ N}$.

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}_\delta$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{N}{T_{\sigma\tau}} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta = 2 \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

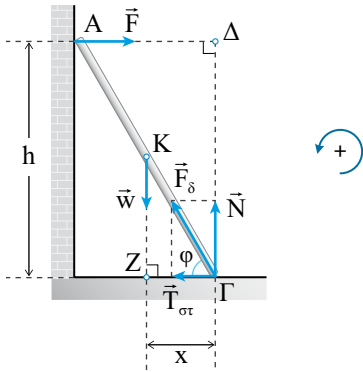
δ. Για το μέτρο της στατικής τριβής ισχύει:

$T_{στ} \leq \mu_s N$ (4), όπου μ_s ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του οριζώντιου δάπεδου. Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$T_{στ} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{στ}}{N} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, ώστε η ράβδος να μην ολισθήσει στο οριζόντιο δάπεδο είναι: $\mu_{s(\min)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

49. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.



Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(Γ)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_{F_s} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F(\Gamma\Delta) + w(\Gamma Z) + 0 = 0 \quad \text{ή} \quad -Fh + wx = 0$$

$$\text{ή} \quad w \frac{L}{2} \sin \varphi = FL \eta \mu \varphi \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad F = \frac{\sqrt{3}}{6} w \quad \text{ή} \quad F = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$

β. Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (2) \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_{στ} \quad \text{ή} \quad T_{στ} = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w \quad \text{ή} \quad N = 60 \text{ N}.$$

Για το μέτρο της στατικής τριβής ισχύει:

$$T_{στ} = \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s = \frac{T_{στ}}{N} \quad \text{ή} \quad \mu_s = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ή} \quad \mu_s = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

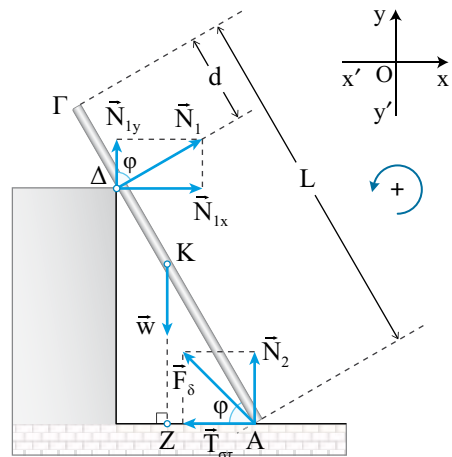
γ. Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ξανά ότι: $F = T_{στ}$ και $N = w$. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $F = \frac{w \sin \theta}{2 \eta \mu \theta}$. Για το μέτρο της στατικής τριβής, ισχύει:

$$T_{στ} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad F \leq \mu_s w \quad \text{ή} \quad \frac{w \sin \theta}{2 \eta \mu \theta} \leq \mu_s w$$

$$\text{ή} \quad \frac{\eta \mu \theta}{\sin \theta} \geq \frac{1}{2\mu_s} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ή} \quad \theta_{\min} = 30^\circ.$$

50. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{N}_1$ από το σκαλοπάτι που είναι κάθετη στη ράβδο και η δύναμη $\vec{F}_\delta$ από το δάπεδο, η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες, στη στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$ και την κάθετη στο δάπεδο δύναμη $\vec{N}_2$.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ ή, αλγεβρικά, $\Sigma \tau = 0$ (1)

και $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή, αλγεβρικά, $\Sigma F_x = 0$ (2)

και $\Sigma F_y = 0$ (3).

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N_1} + \tau_w + \tau_{F_\delta} = 0$$

$$\text{ή} \quad -N_1(L-d) + w(AZ) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad N_1(L-d) = Mg \frac{L}{2} \sin \varphi \quad \text{ή} \quad N_1 = 10 \text{ N.}$$

β. Από τη σχέση (2), έχουμε: $N_{1x} - T_{\sigma\tau} = 0$

$$\text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = N_{1\eta\mu\varphi} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 5\sqrt{3} \text{ N.}$$

γ. Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$N_{1y} + N_2 - w = 0 \quad \text{ή} \quad N_2 = Mg - N_{1\sigma\sigma\eta\varphi}$$

$$\text{ή} \quad N_2 = 25 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το δάπεδο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_\delta = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N_2^2} \quad \text{ή} \quad F_\delta = 10\sqrt{7} \text{ N.}$$

δ. Για το μέτρο της στατικής τριβής ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N_2 \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N_2} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq 0,2\sqrt{3}.$$

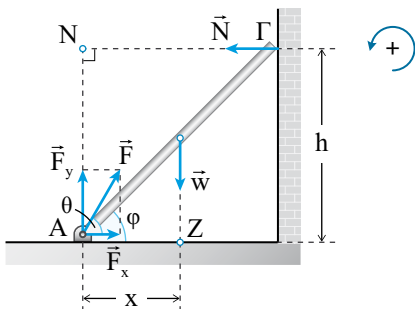
Επομένως, είναι: $\mu_{s(\min)} = 0,2\sqrt{3}.$

51. α. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_N = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - wx + Nh \quad \text{ή} \quad NL\eta\mu\varphi = w \frac{L}{2} \sigma\sigma\eta\varphi$$

$$\text{ή} \quad N = 10 \text{ N.}$$



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \text{ (1)} \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1), έχουμε: $F_x - N = 0$

$$\text{ή} \quad F_x = N \quad \text{ή} \quad F_x = 10 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε: $F_y - w = 0$

$$\text{ή} \quad F_y = w \quad \text{ή} \quad F_y = 20 \text{ N.}$$

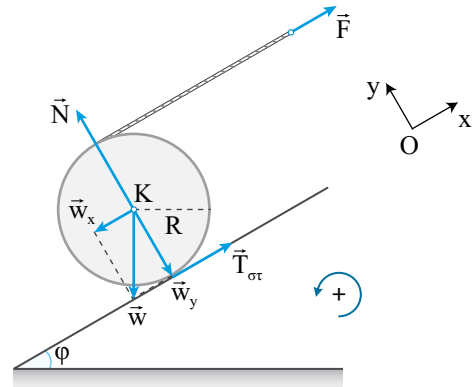
Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 10\sqrt{5} \text{ N.}$$

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\theta = 2.$$

52. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \text{ (1)} \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \text{ (2)}$$

και $\Sigma \tau = 0$ (3).

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$N - w_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_y \quad \text{ή} \quad N = w \sigma\sigma\eta\varphi$$

$$\text{ή} \quad N = 100\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $F + T_{\sigma\tau} - w_x = 0$

ή $F + T_{\sigma\tau} = w_x$ ή $F + T_{\sigma\tau} = w \eta \mu \varphi$ (4).

Από τη σχέση (3), έχουμε:

$\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_w + \tau_N + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_F = 0$

ή $0 + 0 + T_{\sigma\tau} R - FR = 0$ ή $T_{\sigma\tau} = F$ (5).

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$2F = w \eta \mu \varphi$ ή $F = 50 \text{ N}$.

β. Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$T_{\sigma\tau} = F = 50 \text{ N}$.

γ. Επειδή ο κύλινδρος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $FR = T'_{\sigma\tau} R$ ή $F = T'_{\sigma\tau}$ και

$\Sigma F_x = 0$ ή $F + T'_{\sigma\tau} = w \eta \mu \varphi$ ή $2T'_{\sigma\tau} = w \eta \mu \varphi$

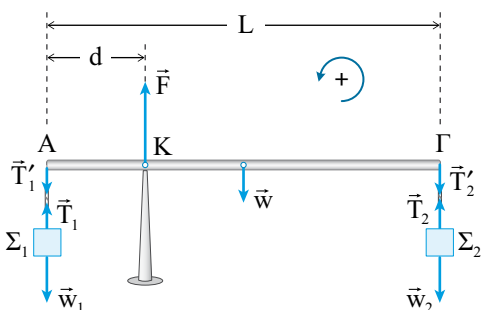
ή $T'_{\sigma\tau} = \frac{w}{2} \eta \mu \varphi$.

Για το μέτρο της στατικής τριβής, ισχύει:

$T'_{\sigma\tau} \leq \mu_s N$ ή $\frac{w}{2} \eta \mu \varphi \leq \mu_s w \sigma \upsilon \nu \varphi$ ή $\epsilon \varphi \varphi \leq 1$

ή $\epsilon \varphi \varphi_{\max} = 1$ ή $\varphi_{\max} = 45^\circ$.

53. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα της ράβδου ΑΓ και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουν σχεδιαστεί στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_1 = w_1$ ή $T_1 = 20 \text{ N}$.

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_2 = w_2$ ή $T_2 = 5 \text{ N}$.

Είναι: $T'_1 = T_1$ ή $T'_1 = 20 \text{ N}$ και $T'_2 = T_2$

ή $T'_2 = 5 \text{ N}$.

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_{T'_1} + \tau_w + \tau_{T'_2} + \tau_F = 0$

ή $+T'_1 d - w \left(\frac{L}{2} - d \right) - T'_2 (L - d) + 0 = 0$

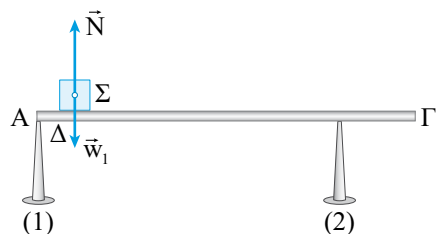
ή $w = 5 \text{ N}$.

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $F = T'_1 + T'_2 + w$

ή $F = 30 \text{ N}$.

54. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο.

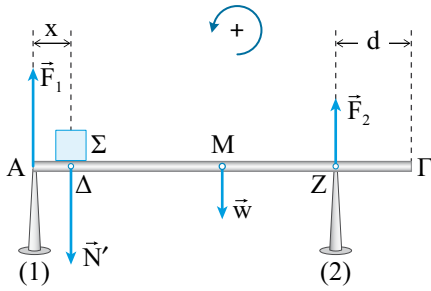


Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma F_y = 0$ ή $N = w_1$ ή $N = mg$ ή $N = 60 \text{ N}$.

Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το σώμα Σ είναι η $\vec{N}'$. Οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{N}$ έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, οπότε για τα μέτρα τους, ισχύει: $N' = N$ ή $N' = 60 \text{ N}$.

β. Έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από τα υποστηρίγματα που έχουν τοποθετηθεί στα σημεία της Α και Ζ αντίστοιχα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{N'} + \tau_w + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - N'x - w \frac{L}{2} + F_2(L-d) = 0 \quad \text{ή} \quad F_2 = 20 \text{ N.}$$

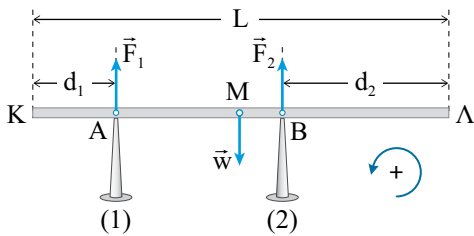
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_2 = w + N'$$

$$\text{ή} \quad F_1 = 60 \text{ N.}$$

γ. $x = 4,5 \text{ m}$ (βλέπε βασική λυμένη άσκηση 5).

55. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό ΚΛ είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Μ και οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα. Σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι $F_2 = 3F_1$ (1).



Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_2 - w = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1 + F_2 = w \quad \text{ή} \quad 4F_1 = w \quad \text{ή} \quad F_1 = 10 \text{ N.}$$

Επομένως, από τη σχέση (1) για $F_1 = 10 \text{ N}$ προκύπτει: $F_2 = 30 \text{ N}$.

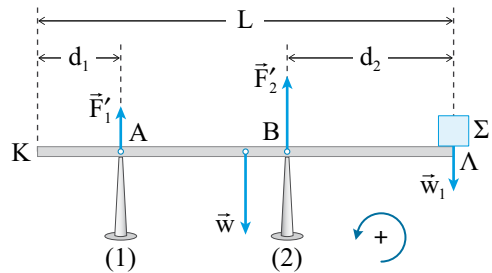
β. Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \left(\frac{L}{2} - d_1 \right) + F_2(L - d_1 - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad d_2 = 0,8 \text{ m.}$$

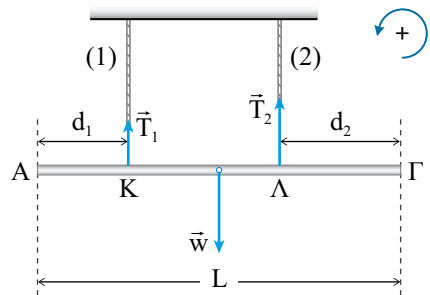
γ. Έστω $\vec{w}_1$ το μέγιστο βάρος ενός πολύ μικρού σώματος Σ το οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε στο άκρο Λ της δοκού χωρίς αυτή να ανατρέπεται. Στην περίπτωση αυτήν, η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το υποστήριγμα (1) γίνεται $\vec{F}'_1 = \vec{0}$.



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ₁ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{\xi(B)} = 0$ ή $\tau_{F'_1} + \tau_w + \tau_{F'_2} + \tau_{w_1} = 0$

$$0 + w \left(\frac{L}{2} - d_2 \right) + 0 - w_1 d_2 = 0 \quad \text{ή} \quad w_1 = 10 \text{ N.}$$

56. α. Έστω $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από τα νήματα (1) και (2) αντίστοιχα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T_1} + \tau_w + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \left(\frac{L}{2} - d_1 \right) + T_2 (L - d_1 - d_2) = 0$$

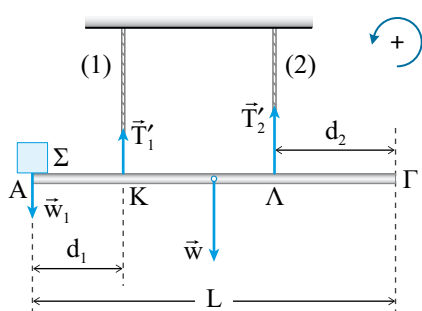
$$\text{ή} \quad T_2 = 42 \text{ N}.$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 + T_2 = w$$

$$\text{ή} \quad T_1 = 28 \text{ N}.$$

γ.



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{\xi(A)} = 0$ ή $\tau_{w_1} + \tau_w + \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T_1' d_1 + T_2' (L - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1' \frac{L}{4} + T_2' \frac{2L}{3} = w \frac{L}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{T_1'}{4} + \frac{2T_2'}{3} = \frac{w}{2} \quad (1).$$

Επειδή ισχύει $T_1' = 2T_2'$, από τη σχέση (1)

$$\text{προκύπτει:} \quad \frac{7}{6} T_2' = \frac{w}{2} \quad \text{ή} \quad T_2' = 30 \text{ N}.$$

Συνεπώς, είναι: $T_1' = 60 \text{ N}$.

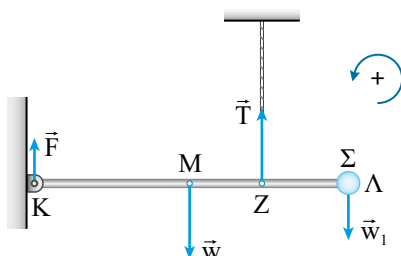
Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$

$$\text{ή} \quad T_1' + T_2' = w_1 + w \quad \text{ή} \quad w_1 = 20 \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad mg = 20 \text{ N} \quad \text{ή} \quad m = 2 \text{ kg}.$$

57. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ είναι: το βάρος της ράβδου $\vec{w}$ στο μέσον της M, η δύναμη $\vec{T}$ από το

νήμα, το βάρος $\vec{w}_1$ του σώματος Σ και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Επειδή οι δυνάμεις $\vec{T}$, $\vec{w}$ και $\vec{w}_1$ έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση.



β. Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T + \tau_{w_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T(KZ) - w_1 L = 0 \quad \text{ή} \quad (KZ) = 3 \text{ m}.$$

γ. Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F + T = w + w_1$$

$$\text{ή} \quad F = 10 \text{ N}.$$

δ. Αν αφαιρέσουμε το σώμα Σ από τη ράβδο, αυτή εξακολουθεί να ισορροπεί, οπότε ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_w + \tau_{T'} = 0$$

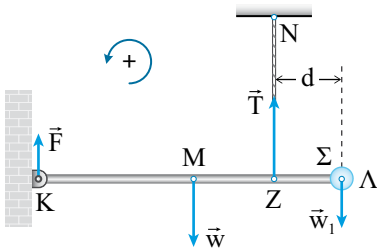
$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T'(KZ) = 0 \quad \text{ή} \quad T' = \frac{80}{3} \text{ N}.$$

Επίσης, ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $F' + T' = w$

$$\text{ή} \quad F' = w - T' \quad \text{ή} \quad F' = \frac{40}{3} \text{ N}.$$

58. α. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M, η τάση $\vec{T}$ του νήματος, το βάρος $\vec{w}_1$ του σώματος Σ και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Επειδή οι δυνάμεις $\vec{w}$, $\vec{T}$ και $\vec{w}_1$ είναι κατακόρυφες, η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση

ση θα είναι και αυτή κατακόρυφη. Έστω ότι η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα πάνω.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_T + \tau_{w_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T(L-d) - w_1 L = 0$$

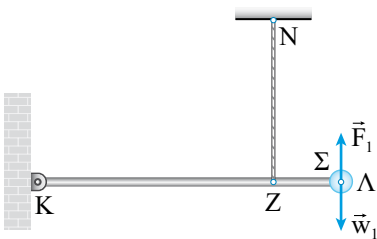
$$\text{ή} \quad T = \frac{Mg \frac{L}{2} + mgL}{L-d} \quad \text{ή} \quad T = 40 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F + T - w - w_1 = 0$$

$$\text{ή} \quad F = Mg + mg - T \quad \text{ή} \quad F = 10 \text{ N.}$$

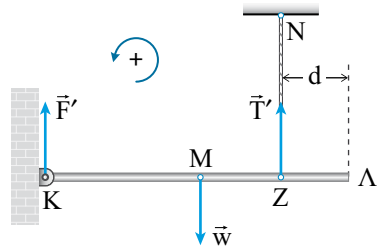
γ. Έστω $\vec{F}_1$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ από τη ράβδο. Η $\vec{F}_1$ είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος ράβδος – σώμα Σ.



Στο σώμα Σ, εκτός από τη δύναμη $\vec{F}_1$, ασκείται και το βάρος του $\vec{w}_1$. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = w_1 \quad \text{ή} \quad F_1 = 10 \text{ N.}$$

δ. Έστω $\vec{T}'$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το νήμα, αν αφαιρέσουμε το σώμα Σ.



Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_{F'} + \tau_w + \tau_{T'} = 0$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T'(L-d) = 0 \quad \text{ή} \quad T' = \frac{Mg \frac{L}{2}}{L-d}$$

$$\text{ή} \quad T' = \frac{80}{3} \text{ N. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:}$$

$$\pi = \frac{T' - T}{T} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = -33,33\%.$$

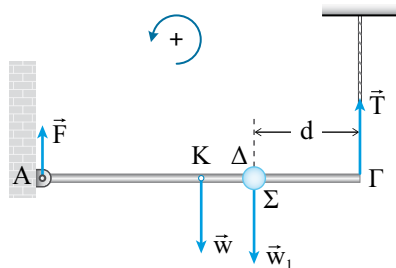
59. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ είναι: το βάρος $\vec{w}$ της ράβδος στο μέσον της K, το βάρος $\vec{w}_1$ του σώματος Σ, η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση.

Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_{w_1} + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad -F(L-d) + w \left(\frac{L}{2} - d \right) + 0 + Td = 0$$

$$\text{ή} \quad F = 20 \text{ N.}$$



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F + T = w_1 + w$$

$$\text{ή} \quad F + T = mg + Mg \quad \text{ή} \quad m = 3 \text{ kg.}$$

γ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{F}_p$ από τη ράβδο. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_p = w_1 \quad \text{ή} \quad F_p = mg \quad \text{ή} \quad F_p = 30 \text{ N.}$$

δ. Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F'} + \tau_w + \tau_{T'} = 0$

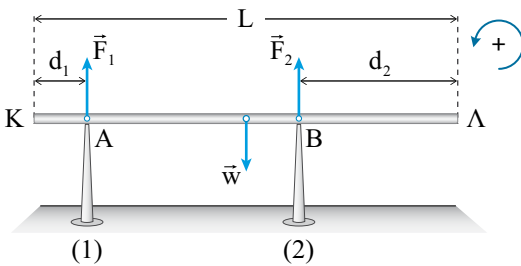
$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T'L = 0 \quad \text{ή} \quad T' = \frac{Mg}{2}$$

$$\text{ή} \quad T' = 10 \text{ N} \quad \text{και} \quad \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή} \quad F' + T' = w \quad \text{ή} \quad F' = Mg - T' \quad \text{ή} \quad F' = 10 \text{ N.}$$

$$\text{Συνεπώς, είναι: } \Delta F = F' - F \quad \text{ή} \quad \Delta F = -10 \text{ N.}$$

60. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ΚΛ είναι: το βάρος της $\vec{w}$ και οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \left(\frac{L}{2} - d_1 \right) + F_2 (L - d_1 - d_2) = 0$$

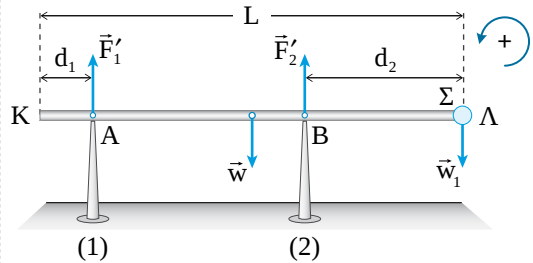
$$\text{ή} \quad F_2 = \frac{Mg \left(\frac{L}{2} - d_1 \right)}{L - d_1 - d_2} \quad \text{ή} \quad F_2 = 30 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_2 - w = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1 = Mg - F_2 \quad \text{ή} \quad F_1 = 10 \text{ N.}$$

β. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ, οι οποίες είναι: το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, το βάρος $\vec{w}_1$ του σώματος Σ και οι δυνάμεις $\vec{F}_1'$ και $\vec{F}_2'$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα.



Σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι: $F_2' = 11F_1'$ (1).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1'} + \tau_w + \tau_{F_2'} + \tau_{w_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F_1'(L - d_1) + w \frac{L}{2} - F_2'd_2 + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1'(L - d_1) + F_2'd_2 = Mg \frac{L}{2}$$

ή, λόγω της σχέσης (1):

$$F_1'(L - d_1) + 11F_1'd_2 = Mg \frac{L}{2}$$

$$\text{ή} \quad F_1' = \frac{MgL}{2(L - d_1 + 11d_2)} \quad \text{ή} \quad F_1' = 4 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (1) για $F_1' = 4 \text{ N}$, προκύπτει

$$F_2' = 44 \text{ N.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1' + F_2' - w - w_1 = 0$$

$$\text{ή} \quad w_1 = F_1' + F_2' - w \quad \text{ή} \quad mg = F_1' + F_2' - Mg$$

$$\text{ή} \quad m = 0,8 \text{ kg.}$$

δ. Έστω ότι μετακινούμε το υποστήριγμα (2) μέχρι το σημείο Z που απέχει απόσταση d'_2 από το άκρο Λ της ράβδου, ώστε η ράβδος μόλις που δεν ανατρέπεται ($\vec{F}' = \vec{0}$). Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(Z)} = 0 \quad \text{ή} \quad -w \left(\frac{L}{2} - d'_2 \right) + w_1 d'_2 = 0$$

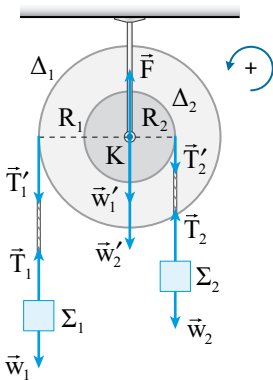
$$\text{ή} \quad Mg \left(\frac{L}{2} - d'_2 \right) = mgd'_2 \quad \text{ή} \quad d'_2 = \frac{10}{3} \text{ m.}$$

Επειδή είναι $d'_2 > d_2$, το υποστήριγμα (2) έχει μετακινηθεί προς τα αριστερά.

Η ελάχιστη οριζόντια απόσταση όπου μπορούμε να μετακινήσουμε το υποστήριγμα (2), ώστε η ράβδος να μην ανατραπεί, είναι:

$$\Delta x_{\min} = d'_2 - d_2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_{\min} = \frac{1}{3} \text{ m.}$$

61. α.



Έστω $\vec{T}_1$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το νήμα (1). Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = m_1 g \quad \text{ή} \quad T_1 = 20 \text{ N.}$$

β. Έστω $\vec{T}_2$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το νήμα (2). Επειδή τα νήματα είναι αβαρή, ισχύει: $T_1 = T'_1$ και $T_2 = T'_2$.

Έστω $\vec{w}'_1$ το βάρος του δίσκου (1), $\vec{w}'_2$ το βάρος του δίσκου (2) και $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w'_1} + \tau_{w'_2} + \tau_F + \tau_{T'_1} + \tau_{T'_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + 0 + T'_1 R_1 - T'_2 R_2 = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 = 40 \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad T_2 = 40 \text{ N.}$$

γ. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

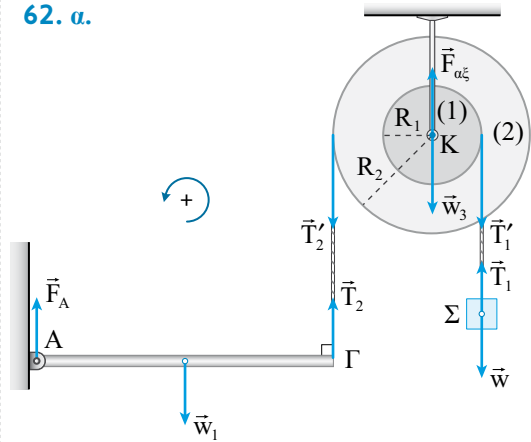
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 g \quad \text{ή} \quad m_2 = 4 \text{ kg.}$$

δ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F = T'_1 + T'_2 + w'_1 + w'_2$$

$$\text{ή} \quad F = 140 \text{ N.}$$

62. α.



Έστω $\vec{T}_1$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ από το νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο (1). Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = w \quad \text{ή} \quad T_1 = 10 \text{ N.}$$

β. Έστω $\vec{T}_2$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο (2). Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία από τα νήματα που είναι τυλιγμένα γύρω από τον κύλινδρο (1) και γύρω από

τον κύλινδρο (2) είναι $\vec{T}'_1$ και $\vec{T}'_2$ αντίστοιχα. Επειδή τα νήματα είναι αβαρή, ισχύει:

$$T'_1 = T_1 \text{ και } T'_2 = T_2.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \text{ ή } \tau_{F_{\alpha\beta}} + \tau_{w_3} + \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή } 0 + 0 + T'_2 R_2 - T'_1 R_1 = 0 \text{ ή } T'_2 R_2 - T'_1 R_1 = 0$$

$$\text{ή } 2T'_2 = T'_1 \text{ ή } 2T_2 = T_1 \text{ ή } T_2 = 5 \text{ N.}$$

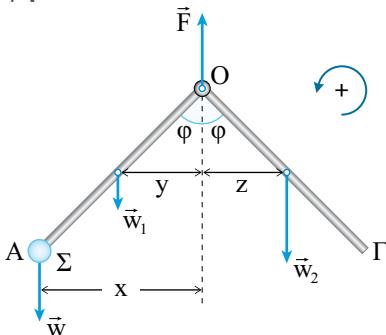
γ. Επειδή όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι κατακόρυφες, και η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση θα είναι επίσης κατακόρυφη. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_{w_1} + \tau_{T_2} = 0$
 ή $0 - w_1 \frac{L}{2} + T_2 L = 0$ ή $w_1 = 2T_2$ ή $w_1 = 10 \text{ N}$.

δ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ ή } \Sigma F_y = 0 \text{ ή } F_A + T_2 = w_1$$

$$\text{ή } F_A = 5 \text{ N.}$$

63. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι: το βάρος $\vec{w}_1$ της ράβδου ΟΑ, το βάρος $\vec{w}_2$ της ράβδου ΟΓ, το βάρος $\vec{w}$ του σώματος Σ και η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής στο σημείο Ο. Επειδή όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες, και η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σύστημα των δύο ράβδων από τον άξονα περιστροφής του θα είναι κατακόρυφη.



β. Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \text{ ή } \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_w + \tau_F = 0$$

$$\text{ή } +w_1 y - w_2 z + wx + 0 = 0$$

$$\text{ή } w_2 \frac{L}{2} \eta \mu \varphi = w L \eta \mu \varphi + w_1 \frac{L}{2} \eta \mu \varphi$$

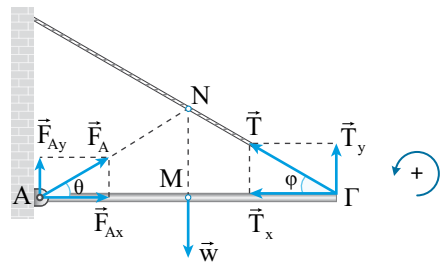
$$\text{ή } w_2 = 100 \text{ N.}$$

γ. Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ ή } \Sigma F_y = 0 \text{ ή } F = w + w_1 + w_2$$

$$\text{ή } F = 170 \text{ N.}$$

64. α. Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Μ, η τάση $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση. Η δύναμη $\vec{F}_A$ σχεδιάζεται με τυχαίο τρόπο, καθώς η τάση $\vec{T}$ του νήματος δεν είναι κατακόρυφη (γενικά, αν ένα στερεό σώμα ισορροπεί με τη δράση τριών μη παράλληλων δυνάμεων, οι φορείς των δυνάμεων αυτών διέρχονται από το ίδιο σημείο). Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{T}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτήν είναι ίσο με το μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο της. Δηλαδή, είναι:

$$\Sigma \tau = 0 \text{ (1).}$$

Επιλέγοντας ως σημείο υπολογισμού των ροπών το σημείο Α, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + T_y L = 0 \quad \text{ή} \quad T_y = \frac{w}{2}$$

$$\text{ή} \quad T \eta \mu \phi = \frac{w}{2} \quad \text{ή} \quad T = 200 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτήν είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή, είναι: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$
ή, αλγεβρικά, $\Sigma F_x = 0$ (2) και $\Sigma F_y = 0$ (3).

Από τη σχέση (2), θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά, προκύπτει:

$$F_{Ax} - T_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T_x \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T \sigma \nu \phi$$

$$\text{ή} \quad F_{Ax} = 100\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (3), θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, προκύπτει:

$$F_{Ay} + T_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = w - T_y$$

$$\text{ή} \quad F_{Ay} = w - T \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = 100 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_A$ που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση δίνεται από τη σχέση:

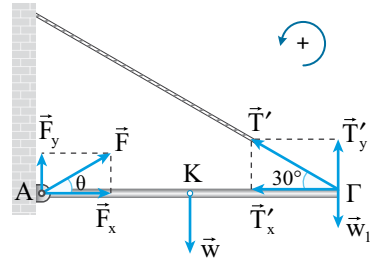
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = 200 \text{ N.}$$

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}_A$ με την οριζόντια διεύθυνση. Ισχύει:

$$\epsilon \phi \theta = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} \quad \text{ή} \quad \epsilon \phi \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 30^\circ.$$

δ. Έστω w_1 το μέγιστο βάρος ενός σώματος Σ αμελητέων διαστάσεων που μπορούμε να τοποθετήσουμε στο άκρο Γ της ράβδου, ώστε να μην κοπεί το νήμα. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της τάσης του νήματος γίνεται:

$$T' = T_{\theta \phi} \quad \text{ή} \quad T' = 240 \text{ N.}$$



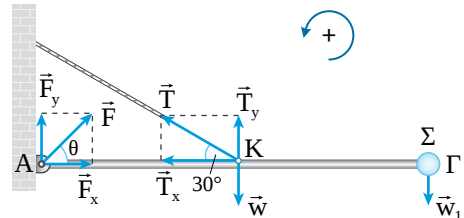
Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{e\xi(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_{w_1} + \tau_{T'} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} - w_1 L + T'_y L = 0$$

$$\text{ή} \quad -w \frac{L}{2} - w_1 L + T' \eta \mu \phi L = 0 \quad \text{ή} \quad w_1 = 20 \text{ N.}$$

65. α. Έστω $\vec{T}$ το μέτρο της τάσης του νήματος.



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{e\xi(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_T + \tau_w + \tau_{w_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + T_y \frac{L}{2} - w \frac{L}{2} + w_1 L = 0$$

$$\text{ή} \quad T \eta \mu \phi \frac{L}{2} = Mg \frac{L}{2} + mg L \quad \text{ή} \quad T = 400 \text{ N.}$$

β. Έστω $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \text{ (1) και } \Sigma F_y = 0 \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_x = T_x \quad \text{ή} \quad F_x = T \sigma \nu \phi \quad \text{ή} \quad F_x = 200\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

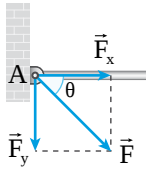
$$F_y + T_y - w - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = w + w_1 - T_{\eta\mu\phi}$$

$$\text{ή} \quad F_y = -50 \text{ N}.$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η συνιστώσα $\vec{F}_y$ έχει φορά προς τα κάτω.

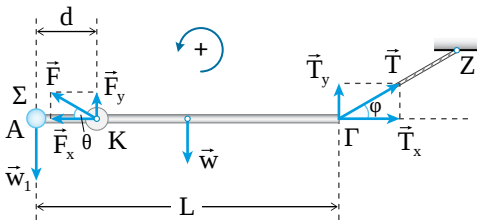
Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 350 \text{ N}$.

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με τη διεύθυνση της ράβδου.



$$\text{Είναι: } \varepsilon\phi\theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi\theta = \frac{1}{7}.$$

66. α. Έστω $\vec{T}$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το νήμα και $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της.



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_{w_1} + \tau_w + \tau_T = 0$

$$\text{ή} \quad 0 + w_1 d - w \left(\frac{L}{2} - d \right) + T_y (L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_{\eta\mu\phi} (L - d) = w \left(\frac{L}{2} - d \right) - mgd$$

$$\text{ή} \quad T = 20 \text{ N}.$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_x = T_x \quad \text{ή} \quad F_x = T \cos\phi \quad \text{ή} \quad F_x = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$F_y + T_y = w_1 + w \quad \text{ή} \quad F_y = mg + w - T_{\eta\mu\phi}$$

$$\text{ή} \quad F_y = 25 \text{ N}.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ προκύπτει:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = \sqrt{925} \text{ N}.$$

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi\theta = \frac{2,5\sqrt{3}}{3}.$$

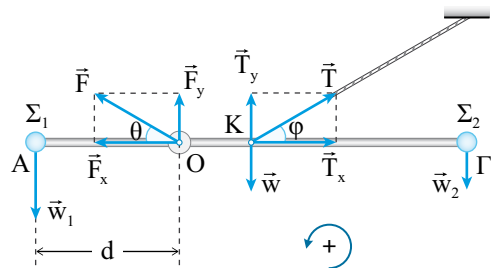
67. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώματα είναι: το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου στο μέσον της Κ, η τάση $\vec{T}$ από το νήμα, τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής της.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_1} + \tau_F + \tau_T + \tau_{w_2} = 0 \quad \text{ή}$$

$$w_1 d + 0 - w[(L/2) - d] + T_{\eta\mu\phi}[(L/2) - d] - w_2(L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad T = 60 \text{ N}.$$



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$F_x - T_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T \sin \varphi \quad \text{ή} \quad F_x = 30\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$F_y + T_y - w_1 - w - w_2 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_y = w + w_1 + w_2 - T \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F_y = 30 \text{ N.}$$

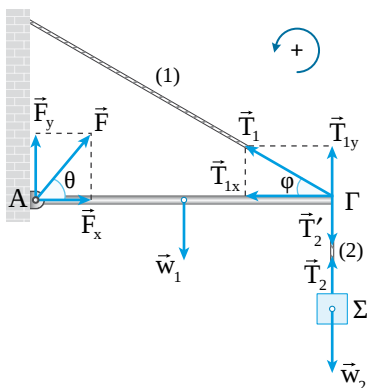
Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 60 \text{ N.}$$

γ. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 30^\circ.$$

68. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}_2$ από το νήμα (2). Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}_1$, η τάση $\vec{T}_1$ από το νήμα (1), η τάση $\vec{T}_2'$ από το νήμα (2) και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ και την τάση $\vec{T}_1$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 - w_2 = 0$$

$$\text{ή} \quad T_2 = mg \quad \text{ή} \quad T_2 = 1 \text{ N.}$$

Επειδή το νήμα (2) είναι αβαρές, ισχύει:

$$T_2' = T_2 \quad \text{ή} \quad T_2' = 1 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{w_1} + \tau_{T_1} + \tau_{T_2'} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} + T_{1y} L - T_2' L = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1 \eta \mu \varphi = T_2' + \frac{Mg}{2} \quad \text{ή} \quad T_1 = 5 \text{ N.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_x - T_{1x} = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T_1 \sin \varphi$$

$$\text{ή} \quad F_x = 2,5\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_y + T_{1y} - w_1 - T_2' = 0$$

$$\text{ή} \quad F_y = Mg + T_2' - T_1 \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F_y = 1,5 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = \sqrt{21} \text{ N.}$$

Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon \varphi \theta = \sqrt{3}/5.$$

δ. Έστω $\vec{T}_1'$ η τάση του νήματος που ασκείται στη ράβδο από το νήμα (1) και $\vec{F}'$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, όταν κόψουμε το νήμα (2). Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_{w_1} + \tau_{T_1'} = 0$$

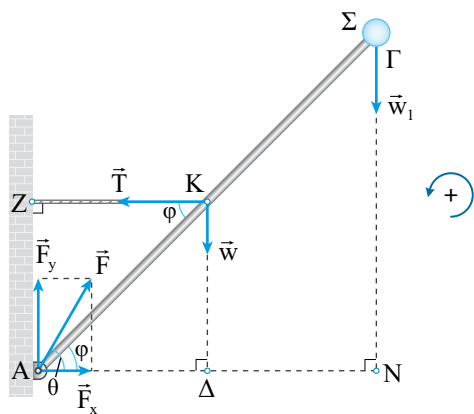
$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} + T_1' L = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1' \eta \mu \varphi = \frac{Mg}{2} \quad \text{ή} \quad T_1' = 3 \text{ N.}$$

Επομένως, η ζητούμενη μεταβολή είναι:

$$\Delta T_1 = T'_1 - T_1 \quad \text{ή} \quad \Delta T_1 = -2 \text{ N.}$$

69. α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ.



Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{\varepsilon^{\pm}(\mathbf{A})} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{\mathbf{F}} + \tau_{\mathbf{T}} + \tau_{\mathbf{W}} + \tau_{\mathbf{W}_1} = 0$$

$$\dot{\eta} = 0 + T(AZ) - w(A\Delta) - w_1(AN) = 0$$

$$\dot{\eta} \quad T \frac{L}{2} \eta \mu \varphi = Mg \frac{L}{2} \sigma \nu \varphi + mgL \sigma \nu \varphi$$

ή $T = 50 \text{ N}$.

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \eta \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \kappa \alpha \iota \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_y - T = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = T \quad \text{ή} \quad F_y = 50 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_v - w - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_v = Mg + mg$$

$$\text{h) } F_v = 40 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη

σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 10\sqrt{41} \text{ N}$.

γ. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση. Ισχύει:

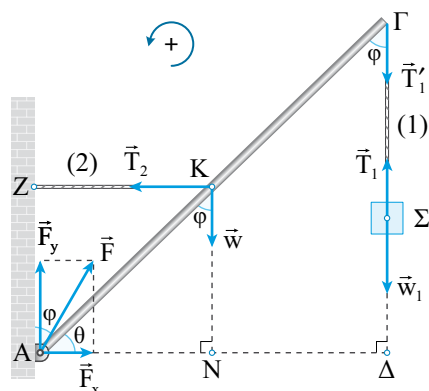
$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_{\varphi\theta} = 0,8.$$

70. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ. Επειδή το σώμα Σ

ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$

$$\text{ή } T_1 = w_1 \quad \text{ή } T_1 = mg \quad \text{ή } T_1 = 10 \text{ N.}$$

Είναι: $T'_1 = T_1$ ή $T'_1 = 10 \text{ N}$.



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{T_2} + \tau_w + \tau_{T'_1} = 0$$

$$\dot{\eta} = 0 + T_2(AZ) - w(AN) - T'_1(A\Delta) = 0$$

$$\eta \quad T_2 \frac{L}{2} \sin \varphi = Mg \frac{L}{2} \eta \mu \varphi + T_1' L \eta \mu \varphi$$

ή $T_2 = 50 \text{ N}$.

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \eta \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \kappa \alpha \iota \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_x - T_2 = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T_2 \quad \text{ή} \quad F_x = 50 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_v - W - T'_1 = 0 \quad \text{ñ} \quad F_v = Mg + T'_1$$

$$\dot{\eta} \quad F_v = 40 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή} \quad F = 10\sqrt{41} \quad \text{ή} \quad F = 64 \text{ N.}$$

Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x}$ ή $\varepsilon\varphi\theta = 0,8$.

δ. Έστω $\vec{T}_2$ η τάση του νήματος που ασκείται στη ράβδο από το νήμα (2) και $\vec{F}'$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, αν κόψουμε το νήμα (1). Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (4)$$

$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (5).$$

Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_w + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + T'_2(AZ) - w(AN) = 0$$

$$\text{ή} \quad T'_2 \frac{L}{2} \sin\varphi = Mg \frac{L}{2} \eta\mu\varphi \quad \text{ή} \quad T'_2 = 30 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (4), έχουμε:

$$F'_x - T'_2 = 0 \quad \text{ή} \quad F'_x = T'_2 \quad \text{ή} \quad F'_x = 30 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (5), έχουμε:

$$F'_y - w = 0 \quad \text{ή} \quad F'_y = Mg \quad \text{ή} \quad F'_y = 30 \text{ N.}$$

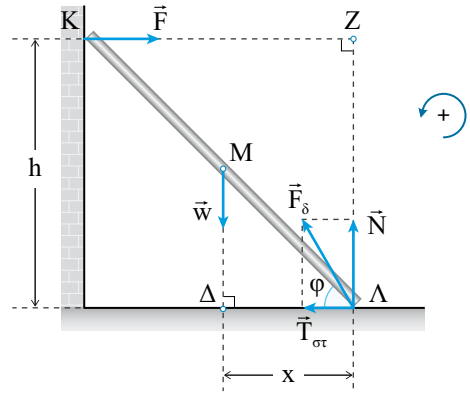
Συνεπώς, είναι:

$$F' = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2} \quad \text{ή} \quad F' = 30\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad F' = 42 \text{ N.}$$

Επομένως, η μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι: $\Delta F = F' - F$ ή $\Delta F = -22 \text{ N}$.

71. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_{F_\delta} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F(\Lambda Z) + w(\Lambda\Delta) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad -Fh + wx = 0 \quad \text{ή} \quad FL\eta\mu\varphi = w \frac{L}{2} \sin\varphi$$

$$\text{ή} \quad F = 10 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = w \quad \text{ή} \quad N = 20 \text{ N.}$$

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F - T_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = F \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 10 \text{ N.}$$

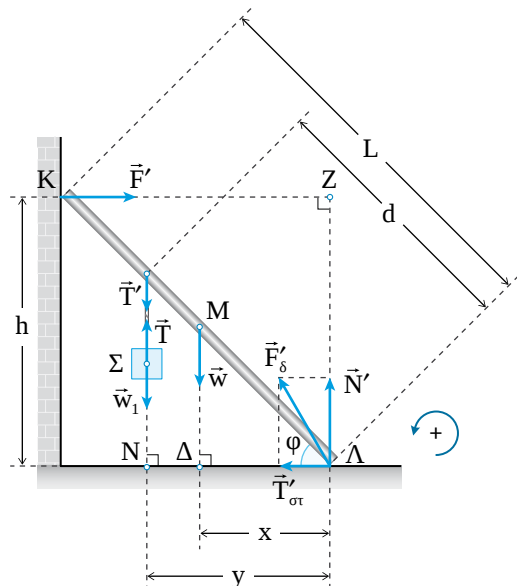
$$\text{δ. Είναι: } T_{\sigma\tau} = T_{op} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s = \frac{T_{\sigma\tau}}{N}$$

$$\text{ή} \quad \mu_s = 0,5.$$

ε. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T = w_1 \quad \text{ή} \quad T = 10 \text{ N.}$$

$$\text{Είναι: } T' = T \quad \text{ή} \quad T' = 10 \text{ N.}$$



Έστω d η μέγιστη απόσταση από το άκρο Λ της ράβδου όπου μπορούμε να αναρτήσουμε το σώμα Σ , ώστε η ράβδος να μην ολισθήσει. Στην περίπτωση αυτήν, για το μέτρο της στατικής τριβής $T'_{\sigma\tau}$ που ασκείται στη ράβδο από το δάπεδο ισχύει: $T'_{\sigma\tau} = T_{op}$ ή $T'_{\sigma\tau} = \mu_s N'$ (3).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (4) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (5).$$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$N' - w - T' = 0 \quad \text{ή} \quad N' = T' + w$$

ή $N' = 30 \text{ N}$. Συνεπώς, από τη σχέση (3) προκύπτει: $T'_{\sigma\tau} = 15 \text{ N}$.

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F' = T'_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad F' = 15 \text{ N}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

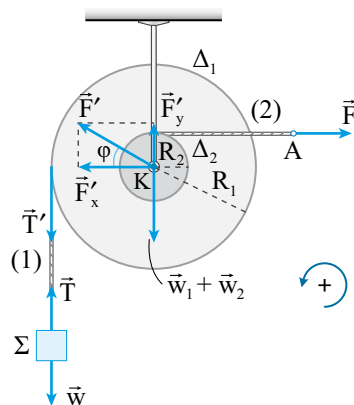
$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_{T'} + \tau_w + \tau_{F_g} = 0$$

$$\text{ή} \quad -F'(\Lambda Z) + T'(\Lambda N) + w(\Lambda \Delta) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad T'y + wx = F'h$$

$$\text{ή} \quad T'd \sin \varphi + w \frac{L}{2} \sin \varphi = F'L \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad d = 0,5 \text{ m}.$$

72. α. Έστω $\vec{T}$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ από το νήμα (1).



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T = w \quad \text{ή} \quad T = 20 \text{ N}.$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία είναι: η τάση $\vec{T}'$ από το νήμα (1), τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των δύο δίσκων, η δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη $\vec{F}'$ από τον άξονα περιστροφής της. Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει: $T' = T$ ή $T' = 20 \text{ N}$. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, είναι:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'} + \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{T'} + \tau_F = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + 0 + T'R_1 - FR_2 = 0 \quad \text{ή} \quad F = 60 \text{ N}.$$

γ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F'_x = F \quad \text{ή} \quad F'_x = 60 \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F'_y = T' + w_1 + w_2 \quad \text{ή} \quad F'_y = T' + M_1 g + M_2 g$$

$$\text{ή} \quad F'_y = 80 \text{ N}.$$

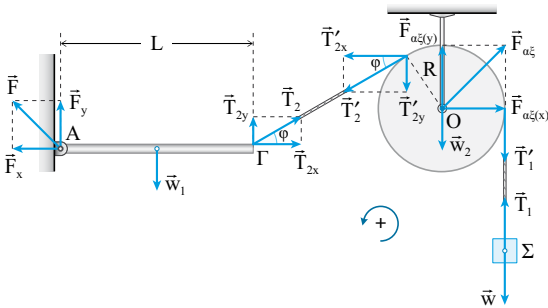
Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$F' = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y} \quad \text{ή} \quad F = 100 \text{ N}.$$

δ. Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}'$ με την οριζόντια διεύθυνση. Ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F'_y}{F'_x} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}.$$

73. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = w \quad \text{ή} \quad T_1 = mg$$

$$\text{ή} \quad T_1 = 10 \text{ N. Είναι: } T'_1 = T_1 \quad \text{ή} \quad T'_1 = 10 \text{ N.}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T'_2} + \tau_{F_{\alpha\xi}} + \tau_{w_2} + \tau_{T'_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad T'_2 R + 0 + 0 - T'_1 R = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 = T'_1$$

$$\text{ή} \quad T'_2 = 10 \text{ N. Είναι: } T_2 = T'_2 \quad \text{ή} \quad T_2 = 10 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{w_1} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} + T_{2y} L = 0 \quad \text{ή} \quad w_1 = 2T_{2y}$$

$$\text{ή} \quad M_1 g = 2T_2 \eta\mu\varphi \quad \text{ή} \quad M_1 = 1 \text{ kg.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$
ή $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$F_x = T_{2x} \quad \text{ή} \quad F_x = T_2 \sigma\upsilon\eta\varphi \quad \text{ή} \quad F_x = 5\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$F_y + T_{2y} = w_1 \quad \text{ή} \quad F_y = M_1 g - T_2 \eta\mu\varphi$$

$$\text{ή} \quad F_y = 5 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 10 \text{ N}$.

δ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (3) και $\Sigma F_y = 0$ (4).

Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$F_{\alpha\xi(x)} - T'_{2x} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\xi(x)} = T'_{2x}$$

$$\text{ή} \quad F_{\alpha\xi(x)} = T'_2 \sigma\upsilon\eta\varphi \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\xi(x)} = 5\sqrt{3} \text{ N.}$$

Από τη σχέση (4), έχουμε:

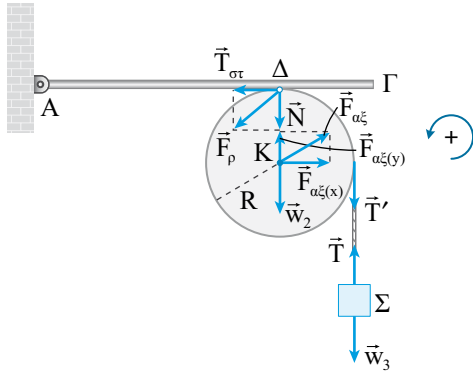
$$F_{\alpha\xi(y)} - T'_{2y} - w_2 - T'_1 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_{\alpha\xi(y)} = T'_{2y} + w_2 + T'_1$$

$$\text{ή} \quad F_{\alpha\xi(y)} = T'_2 \eta\mu\varphi + M_2 g + T'_1 \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\xi(y)} = 35 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της προκύπτει: $F_{\alpha\xi} = \sqrt{F_{\alpha\xi(x)}^2 + F_{\alpha\xi(y)}^2}$ ή $F_{\alpha\xi} = 10\sqrt{13} \text{ N}$.

74. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_3$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_2$, η δύναμη από το νήμα $\vec{T}'$, η δύναμη από τον άξονα περιστροφής της $\vec{F}_{\alpha\xi}$ και η δύναμη από τη ράβδο $\vec{F}_\rho$. Η δύναμη $\vec{F}_\rho$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες: τη δύναμη $\vec{N}$ που είναι κάθετη στη ράβδο ΑΓ και τη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που είναι παράλληλη προς τη ράβδο ΑΓ. Η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\xi}$ αναλύεται, επίσης, σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, την $\vec{F}_{\alpha\xi(x)}$ και την $\vec{F}_{\alpha\xi(y)}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T - w_3 = 0 \quad \text{ή} \quad T = 20 \text{ N.}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει:

$$T' = T \quad \text{ή} \quad T' = 20 \text{ N.}$$

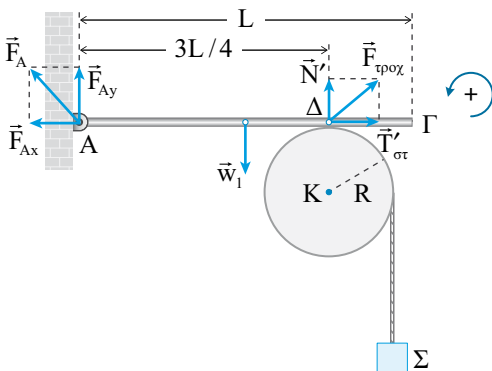
Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T'} + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_N + \tau_{w_2} + \tau_{F_{a\zeta}} = 0$$

$$\text{ή} \quad -T'R + T_{\sigma\tau}R + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad T_{\sigma\tau}R = T'R \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = T' \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 20 \text{ N.}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ΑΓ είναι: το βάρος της $\vec{w}_1$, η δύναμη από την τροχαλία $\vec{F}_{\text{τροχ}}$ ($\vec{F}_{\text{τροχ}} = -\vec{F}_p$) και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_A$. Η δύναμη $\vec{F}_{\text{τροχ}}$ αναλύεται στη συνιστώσα $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) και στη συνιστώσα $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ ($\vec{T}'_{\sigma\tau} = -\vec{T}_{\sigma\tau}$), όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_{w_1} + \tau_{N'} + \tau_{T'_{\sigma\tau}} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} + N' \frac{3L}{4} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{3}{4} N' = \frac{M_1 g}{2}$$

$$\text{ή} \quad N' = \frac{2M_1 g}{3} \quad \text{ή} \quad N' = 20 \text{ N.}$$

$$\text{Ισχύει: } T'_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad T'_{\sigma\tau} = 20 \text{ N.}$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την τροχαλία είναι:

$$F_{\text{τροχ}} = \sqrt{(T'_{\sigma\tau})^2 + (N')^2} \quad \text{ή} \quad F_{\text{τροχ}} = 20\sqrt{2} \text{ N.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$T'_{\sigma\tau} - F_{Ax} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T'_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = 20 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_{Ay} + N' - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = M_1 g - N'$$

$$\text{ή} \quad F_{Ay} = 10 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = 10\sqrt{5} \text{ N.}$$

δ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (4).$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$F_{a\zeta(x)} - T_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{a\zeta(x)} = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad F_{a\zeta(x)} = 20 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει:

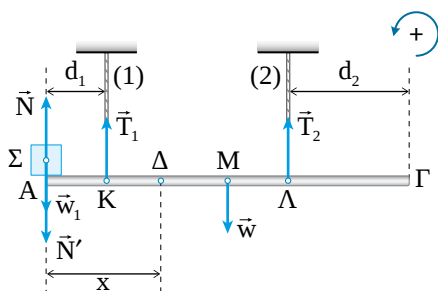
$$F_{a\zeta(y)} - w_2 - T' - N = 0$$

$$\text{ή} \quad F_{a\zeta(y)} = Mg + T' + N \quad \text{ή} \quad F_{a\zeta(y)} = 100 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονά περιστροφής της είναι:

$$F_{a\zeta} = \sqrt{F_{a\zeta(x)}^2 + F_{a\zeta(y)}^2} \quad \text{ή} \quad F_{a\zeta} = \sqrt{10.400} \text{ N.}$$

75. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_1 \quad \text{ή} \quad N = mg.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Μ, οι τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ από τα νήματα (1) και (2) αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{N}'$ από το σώμα Σ.

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{N}'$ έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, ισχύει: $N' = N = mg$.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 + T_2 = N' + w$$

$$\text{ή} \quad 5T_2 + T_2 = mg + Mg \quad \text{ή} \quad 6T_2 = mg + Mg \quad (1).$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N'} + \tau_{T_1} + \tau_w + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad +N'd_1 + 0 - w\left(\frac{L}{2} - d_1\right) + T_2(L - d_1 - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad mgd_1 - Mg\left(\frac{L}{2} - d_1\right) + T_2(L - d_1 - d_2) = 0 \quad (2).$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτουν: $T_2 = 20 \text{ N}$ και $m = 6 \text{ kg}$.

Συνεπώς, είναι: $T_1 = 5T_2$ ή $T_1 = 100 \text{ N}$.

β. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή}$$

$$-N'(x - d_1) - Mg\left(\frac{L}{2} - d_1\right) + T_2(L - d_1 - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_2 = 20 + 20x \text{ (S.I.)} \quad (3).$$

Από την ισορροπία της ράβδου, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 + T_2 = N' + Mg$$

$$\text{ή} \quad T_1 = N' + Mg - T_2 \quad \text{ή} \quad T_1 = mg + Mg - T_2,$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (3): } T_1 = 100 - 20x \text{ (S.I.)} \quad (4).$$

γ. i. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (3) και (4), όσο μετακινούμε το σώμα Σ προς τα δεξιά πάνω στη ράβδο, το μέτρο της τάσης T_2 του νήματος (2) αυξάνεται, ενώ το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος (1) μειώνεται, ξεκινώντας από την τιμή 100 N (για $x = 0$). Επομένως, το νήμα (1) καθώς μετακινείται το σώμα Σ προς τα δεξιά πάνω στη ράβδο δεν κινδυνεύει να κοπεί. Για να μην κοπεί το νήμα (2), του οποίου το μέτρο της τάσης αυξάνεται, πρέπει να ισχύει:

$$T_2 \leq T_{\theta p} \quad \text{ή} \quad 20 + 20x \leq 140 \quad \text{ή} \quad x \leq 6 \text{ m.}$$

Καθώς μετακινείται το σώμα Σ προς τα δεξιά πάνω στη ράβδο, το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος (1) μειώνεται και όταν γίνει $T_1 = 0$, το νήμα (1) λυγίζει και η ράβδος δεν ισορροπεί οριζόντια. Επομένως, πρέπει να ισχύει:

$$T_1 \geq 0 \quad \text{ή} \quad 100 - 20x \geq 0 \quad \text{ή} \quad x \leq 5 \text{ m.}$$

Επομένως, για να εξακολουθεί η ράβδος να ισορροπεί οριζόντια, πρέπει να ισχύει:

$$x \leq 5 \text{ m} \quad \text{και} \quad x \leq 6 \text{ m.}$$

Συνεπώς, πρέπει $x \leq 5 \text{ m}$ ή $x_{\max} = 5 \text{ m}$.

ii. Πρέπει να ισχύει:

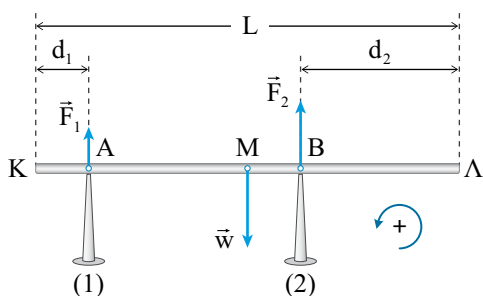
$$T_2 \leq T_{\theta p} \quad \text{ή} \quad 20 + 20x \leq 110$$

$$\text{ή} \quad x \leq 4,5 \text{ m} \quad \text{και} \quad T_1 \geq 0 \quad \text{ή} \quad 100 - 20x \geq 0$$

$$\text{ή} \quad x \leq 5 \text{ m}.$$

Επομένως, πρέπει: $x \leq 4,5 \text{ m}$ ή $x_{\max} = 4,5 \text{ m}$.

76. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M και οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma F_y = 0$ (1) και $\Sigma \tau = 0$ (2).

$$\text{Ισχύει: } F_2 = 3F_1 \text{ (3).}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_2 = w \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (3):}$$

$$4F_1 = w \quad \text{ή} \quad F_1 = 10 \text{ N}.$$

Επομένως από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$F_2 = 30 \text{ N}.$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \left(\frac{L}{2} - d_1 \right) + F_2 (L - d_1 - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad d_2 = 3 \text{ m}.$$

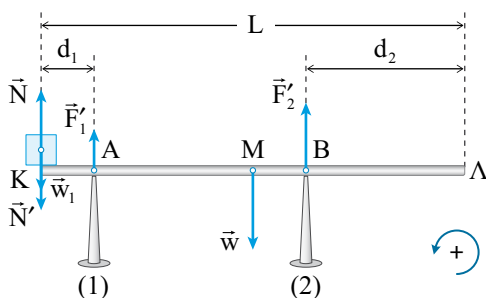
γ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη

ράβδο. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_1.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$, οι δυνάμεις $\vec{F}'_1$ και $\vec{F}'_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{N}'$ από το σώμα Σ. Ισχύει:

$$N' = N \quad \text{ή} \quad N' = w_1.$$



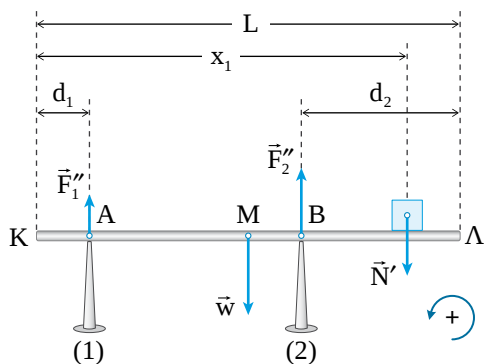
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N'} + \tau_{F'_1} + \tau_w + \tau_{F'_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad N'd_1 + 0 - w \left(\frac{L}{2} - d_1 \right) + F'_2 (L - d_1 - d_2) = 0$$

$$\text{ή} \quad F'_2 = 25 \text{ N}.$$

δ. Έστω x_1 η απόσταση του σώματος Σ από το άκρο K τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η ράβδος ανατρέπεται. Τη στιγμή t_1 ισχύει: $\vec{F}_1'' = \vec{0}$.



Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau_{(O)} = \tau_{T_1'} + \tau_{w_{\text{ολ}}} + \tau_{F_1} + \tau_{T_2'} = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1' R_1 + 0 + 0 - T_2' R_2 = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 R_1 = T_2 R_2$$

$$\text{ή} \quad T_2 = 60 \text{ N.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

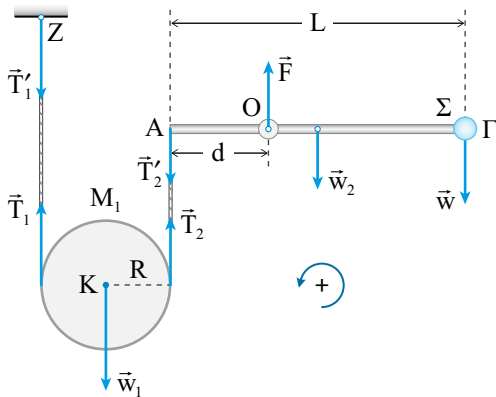
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 g \quad \text{ή} \quad m_2 = 6 \text{ kg.}$$

δ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = w_{\text{ολ}} + T_1' + T_2'$$

$$\text{ή} \quad F_1 = (M_1 + M_2)g + T_1 + T_2 \quad \text{ή} \quad F_1 = 150 \text{ N.}$$

78. α. Επειδή ο δίσκος ισορροπεί, ισχύει:



$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_1} + \tau_{T_2} + \tau_{T_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + T_2 R - T_1 R = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = T_1 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 + T_2 = w_1$$

$$\text{ή} \quad T_1 + T_2 = M_1 g \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$T_1 = T_2 = 40 \text{ N.}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει:

$$T_2' = T_2 \quad \text{ή} \quad T_2' = 40 \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T_2'} + \tau_F + \tau_{w_2} + \tau_w = 0$$

$$\text{ή} \quad T_2' d + 0 - w_2 \left(\frac{L}{2} - d \right) - w(L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_2' d - M_2 g \left(\frac{L}{2} - d \right) - mg(L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad d = 1 \text{ m.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_2' + w_2 + w$$

$$\text{ή} \quad F = T_2' + M_2 g + mg \quad \text{ή} \quad F = 90 \text{ N.}$$

79. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και οι τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ από το νήμα. Αφού ο δίσκος ισορροπεί ακίνητος, ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T_1} + \tau_{T_2} + \tau_{w_2} = 0$$

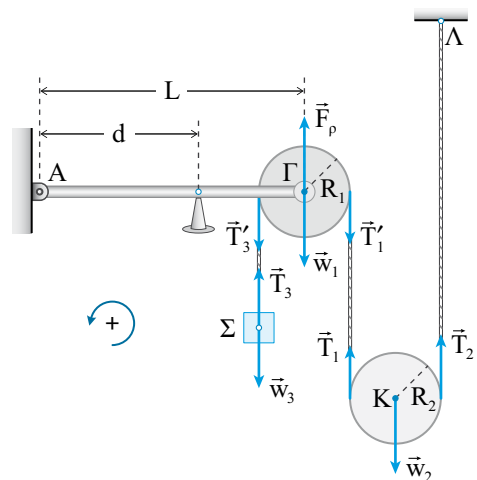
$$\text{ή} \quad -T_1 R_1 + T_2 R_2 + 0 = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = T_2.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$T_1 + T_2 - w_2 = 0 \quad \text{ή} \quad 2T_1 = M_2 g$$

$$\text{ή} \quad T_1 = 20 \text{ N.}$$

Επομένως, είναι: $T_1 = T_2 = 20 \text{ N.}$



β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_1$, οι δυνάμεις $\vec{T}'_1$ και $\vec{T}'_3$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}_p$ από τη ράβδο.

Για τα μέτρα των τάσεων $\vec{T}'_1$ και $\vec{T}'_3$, ισχύει:

$$T'_1 = T_1 \quad \text{ή} \quad T'_1 = 20 \text{ N} \quad \text{και} \quad T'_3 = T_3.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(T)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_1} + \tau_{F_p} + \tau_{T'_3} + \tau_{T'_1} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + T'_3 R_1 - T'_1 R_1 = 0 \quad \text{ή} \quad T'_3 = T'_1$$

$$\text{ή} \quad T_3 = T_1 \quad \text{ή} \quad T_3 = 20 \text{ N}.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_3$ και η δύναμη $\vec{T}_3$ από το νήμα. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_3 - w_3 = 0 \quad \text{ή} \quad T_3 = mg$$

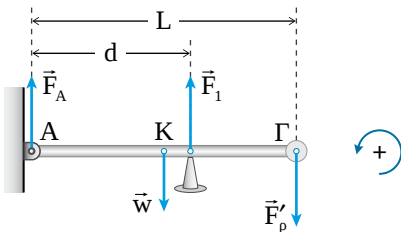
$$\text{ή} \quad m = 2 \text{ kg}.$$

γ. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_p - w_1 - T'_3 - T'_1 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_p = M_1 g + T_3 + T_1 \quad \text{ή} \quad F_p = 60 \text{ N}.$$

δ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: η δύναμη $\vec{F}'_p$ από την τροχαλία ($\vec{F}'_p = -\vec{F}_p$), η δύναμη $\vec{F}_1$ από το υποστήριγμα, το βάρος $\vec{w}$ στο μέσον της K και η δύναμη $\vec{F}_A$ από τον άξονα περιστροφής της.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_w + \tau_{F_1} + \tau_{F'_p} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w \frac{L}{2} + F_1 d - F'_p L = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1 d = Mg \frac{L}{2} + F'_p L \quad \text{ή} \quad F_1 = \frac{340}{3} \text{ N}.$$

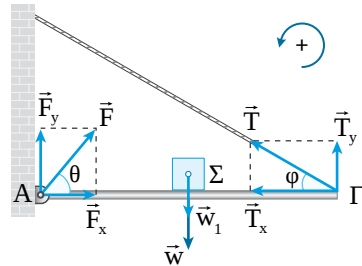
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_A + F_1 - w - F'_p = 0$$

$$\text{ή} \quad F_A = Mg + F'_p - F_1 \quad \text{ή} \quad F_A = -\frac{112}{3} \text{ N}.$$

Δηλαδή, η δύναμη $\vec{F}_A$ έχει μέτρο $\frac{112}{3} \text{ N}$ και φορά προς τα κάτω.

80. α. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σώμα Σ είναι: το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, το βάρος $\vec{w}_1$ του σώματος Σ , η τάση $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ και την τάση του νήματος $\vec{T}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{w_1} + \tau_w + \tau_T = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} - w \frac{L}{2} + T_y L = 0$$

$$\text{ή} \quad T \eta \mu \phi = \frac{mg}{2} + \frac{Mg}{2} \quad \text{ή} \quad T = 60 \text{ N}.$$

β. Επειδή το σύστημα ράβδος – σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_x - T_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T \sigma \nu \eta \phi$$

$$\text{ή} \quad F_x = 30\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_y + T_y - w_1 - w = 0$$

$$\text{ή } F_y = mg + Mg - T_{\eta\mu\phi} \quad \text{ή } F_y = 30 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από τον κατακόρυφο τοίχο υπολογίζεται από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 60 \text{ N}$.

Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{ή } \epsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή } \theta = 30^\circ.$$

γ. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η τάση του νήματος να γίνει ίση με το μηδέν. Επομένως, πρέπει να ασκήσουμε στο άκρο Γ της ράβδου μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$ με φορά προς τα πάνω. Επειδή η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $-Mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} + F_1L = 0$ ή $F_1 = 30 \text{ N}$.

δ. Έστω $\vec{F}'$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή } F' + F_1 = Mg + mg \quad \text{ή } F' = 30 \text{ N.}$$

ε. Η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει φορά προς τα κάτω.

$$\text{Ισχύει: } \Sigma\tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } -Mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} + T_{\theta\rho}\eta\mu\phi L - F_2L = 0$$

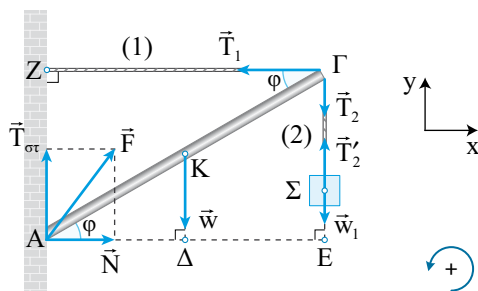
$$\text{ή } F_2 = 30 \text{ N.}$$

81. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η τάση του νήματος $\vec{T}_1$ από το νήμα (1), η τάση του νήματος $\vec{T}_2$ από το νήμα (2) και η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο που αναλύεται στην κάθετη προς τον τοίχο δύναμη $\vec{N}$ και στη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα

Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η τάση του νήματος $\vec{T}'_2$ από το νήμα (2). Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή } T'_2 = w_2 \quad \text{ή } T'_2 = mg$$

$$\text{ή } T'_2 = 20 \text{ N. Είναι: } T_2 = T'_2 \quad \text{ή } T_2 = 20 \text{ N.}$$



β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή } 0 - w(A\Delta) + T_1(AZ) - T_2(AE) = 0$$

$$\text{ή } T_1L\eta\mu\phi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\eta\phi + T_2L\sigma\upsilon\eta\phi$$

$$\text{ή } T_1 = 30\sqrt{3} \text{ N.}$$

γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή } N = T_1 \quad \text{ή } N = 30\sqrt{3} \text{ N και}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή } T_{\sigma\tau} = w + T_2 \quad \text{ή } T_{\sigma\tau} = 40 \text{ N.}$$

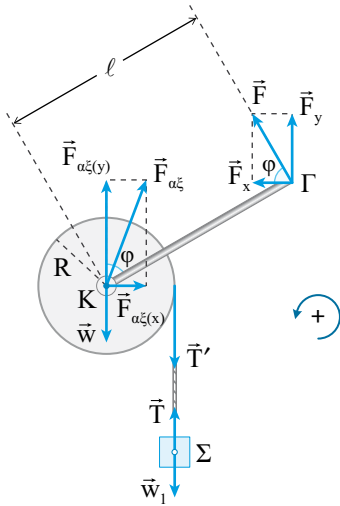
Συνεπώς, η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από τον τοίχο έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N^2} \quad \text{ή } F = 10\sqrt{43} \text{ N.}$$

δ. Ισχύει: $T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N$ ή $\mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N}$

$$\text{ή } \mu_s \geq \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad \text{ή } \mu_{s(\min)} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

82. α. Στο επόμενο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα βαρούλκο – σώμα Σ.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T = w_1 \quad \text{ή} \quad T = mg$$

$$\text{ή} \quad T = 20 \text{ N. Είμαι: } T' = T \quad \text{ή} \quad T' = 20 \text{ N.}$$

β. Επειδή το βαρούλκο ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_w + \tau_{F_{\alpha\zeta}} + \tau_{T'} = 0$$

$$\text{ή} \quad F\ell + 0 + 0 - T'R = 0 \quad \text{ή} \quad F = \frac{T'R}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad F = 10 \text{ N.}$$

γ. Επειδή το βαρούλκο ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_{\alpha\zeta(x)} - F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\zeta(x)} = F \sin \varphi$$

$$\text{ή} \quad F_{\alpha\zeta(x)} = 8 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_{\alpha\zeta(y)} + F_y - w - T' = 0$$

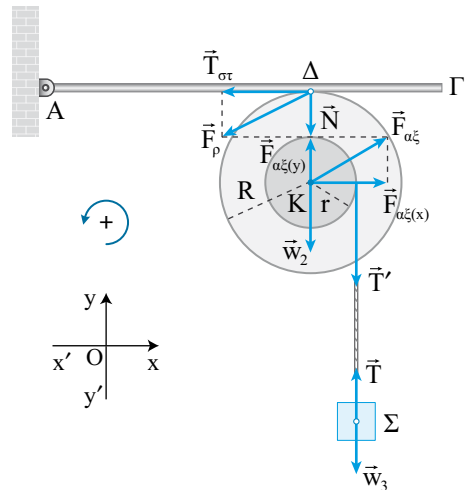
$$\text{ή} \quad F_{\alpha\zeta(y)} = Mg + T' - F \eta \mu \varphi \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\zeta(y)} = 94 \text{ N.}$$

Το μέτρο τη δύναμης που ασκείται στο βαρούλκο από τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$F_{\alpha\zeta(y)} = \sqrt{F_{\alpha\zeta(x)}^2 + F_{\alpha\zeta(y)}^2} \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\zeta(y)} = 10\sqrt{89}$$

$$\text{ή} \quad F = 94 \text{ N.}$$

83. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_3$ και η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_2$, η δύναμη από το νήμα $\vec{T}'$, η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής της και η δύναμη $\vec{F}_p$ από τη ράβδο. Η δύναμη $\vec{F}_p$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύτες συνιστώσες, τη δύναμη $\vec{N}$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα $y'y$ και τη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονά της σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες: την $\vec{F}_{\alpha\zeta(x)}$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και την $\vec{F}_{\alpha\zeta(y)}$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα $y'y$.

Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή, αλγεβρικά, } \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T - w_3 = 0$$

$$\text{ή} \quad T = 9 \text{ N.}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει:

$$T' = T \quad \text{ή} \quad T' = 9 \text{ N.}$$

β. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτήν ως προς οποιοδήποτε σημείο της είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0 \quad (1).$$

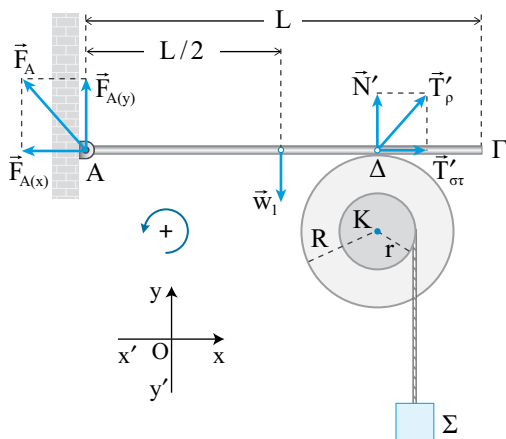
Εφαρμόζοντας τη σχέση (1) ως προς το κέντρο Κ της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_{A\zeta}} + \tau_{w_2} + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{T'} + \tau_N = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + T_{\sigma\tau} R_2 - T' R_1 + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = \frac{T' R_1}{R_2} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 3 \text{ N}.$$

γ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ΑΓ είναι: το βάρος της $\vec{w}_1$, η αντίδραση της δύναμης $\vec{F}_p$, η $\vec{F}'_p$, η οποία αναλύεται στην κάθετη προς τη ράβδο δύναμη $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) και στην παράλληλη προς τη ράβδο δύναμη $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ ($\vec{T}'_{\sigma\tau} = -\vec{T}_{\sigma\tau}$) και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_A$.



Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_A$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, την $\vec{F}_{Ax}$ και την $\vec{F}_{Ay}$ που έχουν τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και του άξονα $y'y$ αντίστοιχα.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή, αλγεβρικά, $\Sigma F_x = 0$ (2) και $\Sigma F_y = 0$ (3) και $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ ή, αλγεβρικά, $\Sigma \tau = 0$ (4).

Εφαρμόζουμε τη σχέση (4) ως προς το άκρο Α της ράβδου όπου ασκείται η άγνωστη δύναμη

$$\vec{F}_A: \Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_{w_1} + \tau_{N'} + \tau_{T'_{\sigma\tau}} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 - w_1 \frac{L}{2} + N'(\Delta\Delta) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad N' = \frac{w_1 L}{2(\Delta\Delta)} \quad \text{ή} \quad N' = 20 \text{ N}.$$

δ. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$T'_{\sigma\tau} - F_{Ax} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T'_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T_{\sigma\tau}$$

$$\text{ή} \quad F_{Ax} = 3 \text{ N}.$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$F_{Ay} + N' - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = w_1 - N'$$

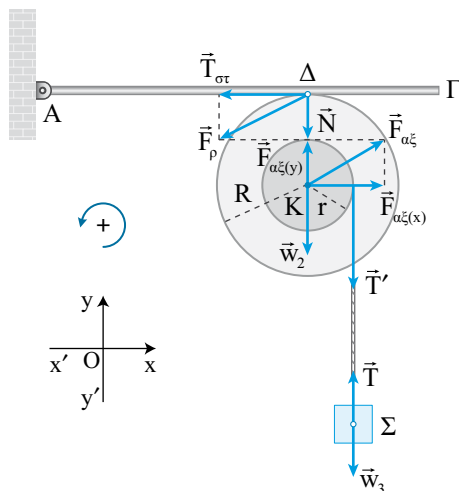
$$\text{ή} \quad F_{Ay} = 10 \text{ N}.$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = \sqrt{109} \text{ N}.$$

ε. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτήν είναι ίση με μηδέν: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή, αλγεβρικά,

$$\Sigma F_x = 0 \quad (5) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (6).$$



Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$$F_{a\xi(x)} - T_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{a\xi(x)} = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad F_{a\xi(x)} = 3 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

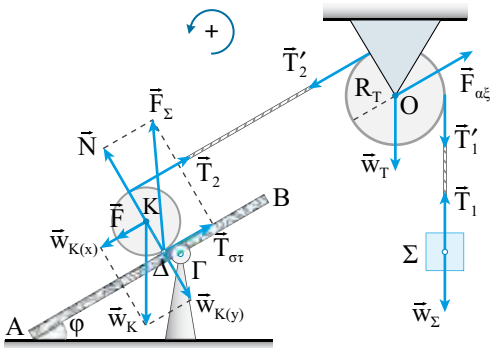
$$F_{a\xi(y)} - T' - w_2 - N = 0 \quad \text{ή} \quad F_{a\xi(y)} = T' + w_2 + N$$

$$\text{ή} \quad F_{a\xi(y)} = T' + w_2 + N' \quad \text{ή} \quad F_{a\xi(y)} = 40 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_{a\xi} = \sqrt{F_{a\xi(x)}^2 + F_{a\xi(y)}^2} \quad \text{ή} \quad F_{a\xi} = \sqrt{1609} \text{ N.}$$

84. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_\Sigma$ και η δύναμη $\vec{T}_1$ από το νήμα. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $T_1 = w_\Sigma$ ή $T_1 = M_\Sigma g$ ή $T_1 = 20 \text{ N}$.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_T$, οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}_{a\xi}$ από τον άξονα περιστροφής της. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_T} + \tau_{F_{a\xi}} + \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + T_2 R_T - T_1 R_T = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = T_1$$

$$\text{ή} \quad T_2 = T_1 \quad \text{ή} \quad T_2 = 20 \text{ N.}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι: το βάρος του $\vec{w}_K$, η δύναμη από το

νήμα $\vec{T}_2$ και η δύναμη $\vec{F}_\Sigma$ από τη σανίδα που αναλύεται στη δύναμη $\vec{N}$ που είναι κάθετη στη σανίδα και στη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{w_K} + \tau_N + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{T_2} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + T_{\sigma\tau} R_K - T_2 R_K = 0 \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = T_2$$

$$\text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 20 \text{ N.}$$

γ. Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau} + T_2 - w_{K(x)} - F = 0 \quad \text{ή}$$

$$F = T_{\sigma\tau} + T_2 - M_K g \sin \varphi \quad \text{ή} \quad F = 30 \text{ N.}$$

δ. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$N - w_{K(y)} = 0 \quad \text{ή} \quad N = M_K g \cos \varphi$$

$$\text{ή} \quad N = 10\sqrt{3} \text{ N.}$$

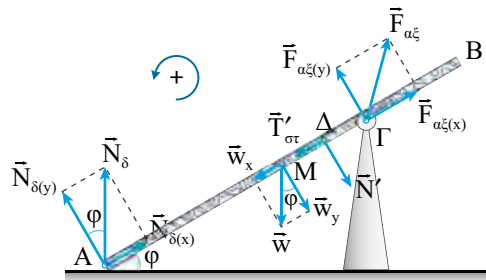
Για το μέτρο της στατικής τριβής, ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{op} \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N}$$

$$\text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \mu_{s(\min)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

ε. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της M, οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ από τον κύλινδρο, η δύναμη $\vec{F}_{a\xi}$ από τον άξονα περιστροφής της και η δύναμη $\vec{N}_\delta$ από το δάπεδο. Είναι:

$$N' = N \quad \text{ή} \quad T'_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau}.$$



Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N_\delta} + \tau_w + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{N'} + \tau_{F_{\alpha\zeta}} = 0$$

$$\text{ή} \quad -N_{\delta(y)} [L - (B\Gamma)] + w_y \left[\frac{L}{2} - (B\Gamma) \right] + 0 + N'(\Gamma\Delta) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad N_\delta \sin \varphi [L - (B\Gamma)] = Mg \sin \varphi \left[\frac{L}{2} - (B\Gamma) \right] + N(\Gamma\Delta) = 0$$

$$\text{ή} \quad N_\delta = \frac{Mg \left[\frac{L}{2} - (B\Gamma) \right] + M_K g (\Gamma\Delta)}{L - (B\Gamma)}$$

$$\text{ή} \quad N_\delta = 5,6 \text{ N.}$$

85. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η τάση $\vec{T}_1$ του νήματος. Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 = m_1 g \quad \text{ή} \quad T_1 = 10 \text{ N.}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}_2$ του νήματος. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 g \quad \text{ή} \quad T_2 = 10 \text{ N.}$$

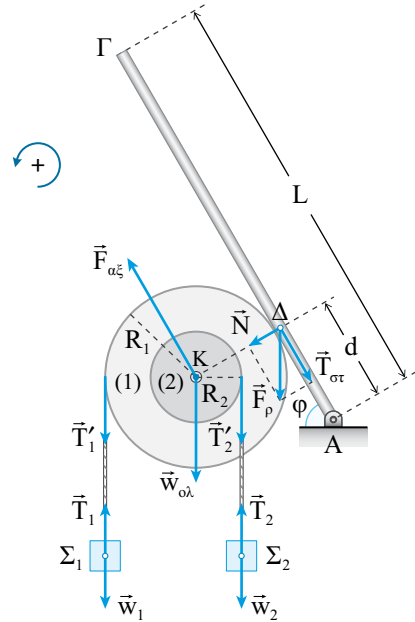
Οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία είναι: το συνολικό της βάρος $\vec{w}_{\text{ολ}}$, οι τάσεις $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$ από τα νήματα, η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής της, η δύναμη $\vec{F}_\rho$ από τη ράβδο που αναλύεται στη δύναμη $\vec{N}$ που είναι κάθετη στη ράβδο και στη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που εφάπτεται στην τροχαλία στο σημείο επαφής Δ με τη ράβδο. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_{\alpha\zeta}} + \tau_{w_{\text{ολ}}} + \tau_{T_1'} + \tau_{T_2'} + \tau_{T_{\sigma\tau}} = 0$$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 + T_1' R_1 - T_2' R_2 - T_{\sigma\tau} R_1 = 0 \quad \text{ή, επειδή}$$

$$T_1' = T_1 \quad \text{και} \quad T_2' = T_2, \quad T_{\sigma\tau} = \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_1}$$

$$\text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = 5 \text{ N.}$$



β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{F}_\rho$ από την τροχαλία η οποία αναλύεται στην $\vec{N}'$ και στην $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση. Είναι:

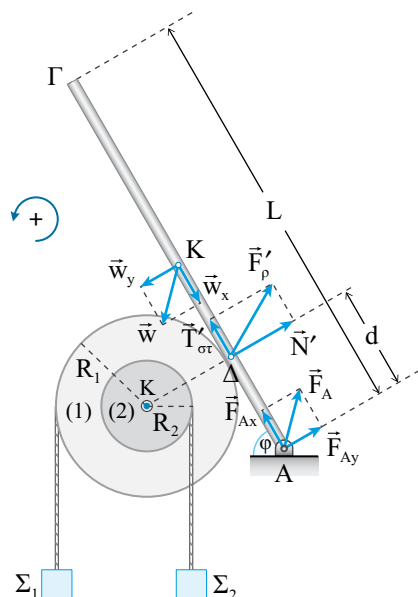
$$T'_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad T'_{\sigma\tau} = 5 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_w + \tau_{N'} + \tau_{T'_{\sigma\tau}} + \tau_{F_A} = 0$$

$$\text{ή} \quad w_y \frac{L}{2} - N'd + 0 + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad Mg \sin \varphi \frac{L}{2} = N'd \quad \text{ή} \quad N' = 10 \text{ N.}$$



Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = \sqrt{37,25} \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad F_A = 6,1 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την τροχαλία είναι:

$$F_p = \sqrt{(T'_{\sigma\tau})^2 + (N')^2} \quad \text{ή} \quad F_p = 5\sqrt{5} \text{ N.}$$

γ. Είναι: $N = N'$ ή $N = 10 \text{ N}$.

Ισχύει: $T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N$ ή $\mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau}}{N}$ ή $\mu_s \geq 0,5$

ή $\mu_{s(\min)} = 0,5$.

δ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_{Ax} + T'_{\sigma\tau} - w_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = Mg \eta \mu \phi - T'_{\sigma\tau}$$

$$\text{ή} \quad F_{Ax} = 3,5 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$F_{Ay} + N' - w_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = Mg \sigma \nu \eta \phi - N'$$

$$\text{ή} \quad F_{Ay} = -5 \text{ N.}$$

2.5 Στροφορμή

ΘΕΜΑΤΑ Α

Α. Θέματα πολλαπλής επιλογής

7. β	8. β	9. δ	10. β	11. γ
12. α	13. β	14. β	15. δ	16. β
17. γ	18. α	19. γ	20. δ	

Β. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

21.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
22.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ

23. Σωστή επιλογή είναι η β.

Αρχικά, το μέτρο L της στροφορμής του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$L = mvr \text{ ή } L = m(\omega r)r \text{ ή } L = mr^2\omega \quad (1).$$

Μετά τις μεταβολές, το μέτρο L' της στροφορμής του υλικού σημείου γίνεται:

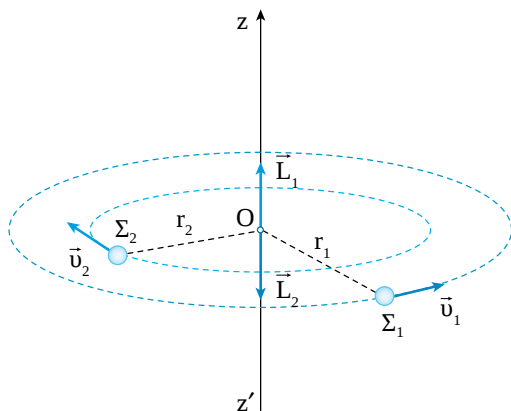
$$L' = m(2r)^2 \frac{\omega}{2} \text{ ή } L' = 2mr^2\omega \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$L' = 2L.$$

24. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του υλικού σημείου Σ_1 είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, ενώ η στροφορμή του υλικού σημείου Σ_2 είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_1 = m_1 v_1 r_1 \text{ ή } L_1 = 2m_1 v_1 R.$$

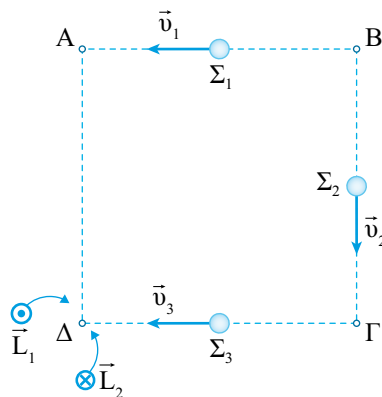
Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_2$ υπολογίζεται από τη σχέση: $L_2 = m_2 v_2 r_2$ ή $L_2 = m_2 v_2 R$.

Η στροφορμή $\vec{L}_{\text{συστ}}$ του συστήματος δίνεται από τη σχέση: $\vec{L}_{\text{συστ}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1).

Θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, η σχέση (1) γράφεται: $L_{\text{συστ}} = L_1 - L_2$ ή $L_{\text{συστ}} = m_1 v_1 R$.

25. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του υλικού σημείου Σ_1 ως προς τον άξονα $z'z$ είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Η στροφορμή $\vec{L}_2$ του υλικού σημείου Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και έχει φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Η στροφορμή $\vec{L}_3$ του υλικού σημείου Σ_3 ως προς τον άξονα $z'z$ είναι ίση με μηδέν, διότι ο φορέας της ταχύτητας $\vec{v}_3$ διέρχεται από τον άξονα $z'z$.



Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ ως προς τον άξονα $z'z$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_1 = m_1 v_1 \alpha \quad \text{ή} \quad L_1 = m v \alpha.$$

Το μέτρο της στοροφορμής $\vec{L}_2$ ως προς τον άξονα $z'z$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_2 = m_2 v_2 \alpha \quad \text{ή} \quad L_2 = 4 m v \alpha.$$

Η στοροφορμή $\vec{L}_{\text{συστ}}$ του συστήματος των τριών υλικών σημείων δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L}_{\text{συστ}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 \quad \text{ή} \quad \vec{L}_{\text{συστ}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \quad (1).$$

Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, η σχέση (1) γίνεται: $L_{\text{συστ}} = L_1 - L_2$ ή $|L_{\text{συστ}}| = 3 m v \alpha$.

26. Σωστή επιλογή είναι η α.

Όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, η στοροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα $z'z$ αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Συνεπώς, είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{\text{τελ}} - L_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{35 - 5}{6 - 0} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Έστω L_1 η στοροφορμή του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - L_{\text{αρχ}}}{t_1 - 0}$$

$$\text{ή} \quad L_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} t_1 + L_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad L_1 = 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_1 = m v_1 r \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{L_1}{m r} \quad \text{ή} \quad v_1 = 150 \text{ m/s}.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι ρυθμοί μεταβολής της στοροφορμής των δύο υλικών σημείων ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθεροί. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στοροφορμής του υλικού σημείου Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

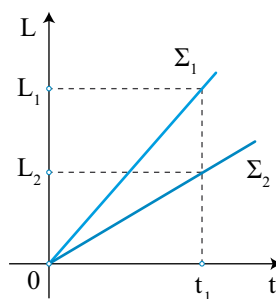
$$\frac{dL_{\Sigma_1}}{dt} = \frac{\Delta L_{\Sigma_1}}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\Sigma_1}}{\Delta t} = \frac{L_1 - 0}{t_1 - 0}$$

ή $\frac{\Delta L_{\Sigma_1}}{\Delta t} = \frac{L_1}{t_1}$ (1), όπου L_1 το μέτρο της στοροφορμής του υλικού σημείου Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 . Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στοροφορμής του υλικού σημείου Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dL_{\Sigma_2}}{dt} = \frac{\Delta L_{\Sigma_2}}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\Sigma_2}}{\Delta t} = \frac{L_2 - 0}{t_1 - 0}$$

ή $\frac{\Delta L_{\Sigma_2}}{\Delta t} = \frac{L_2}{t_1}$ (2), όπου L_2 το μέτρο της στοροφορμής του υλικού σημείου Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\frac{\Delta L_{\Sigma_1}}{\Delta t}}{\frac{\Delta L_{\Sigma_2}}{\Delta t}} = \frac{L_1}{L_2} \quad (3).$$



Όπως φαίνεται από το προηγούμενο διάγραμμα τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $L_1 > L_2$, οπότε

$$\text{από τη σχέση (3) προκύπτει: } \frac{\Delta L_{\Sigma_1}}{\Delta t} > \frac{\Delta L_{\Sigma_2}}{\Delta t}.$$

28. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σφαιρίδια είναι τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των δύο σφαιριδίων, η δύναμη $\vec{F}_{αξ}$ από τον άξονα περιστροφής και η δύναμη $\vec{F}$. Η μόνη εξωτερική δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα $z'z$ είναι η δύναμη $\vec{F}$. Συνεπώς, είναι:

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{εξ} \quad \text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_F$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \frac{F\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \frac{1}{2}F\ell.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η στροφορμή του συστήματος ράβδος – σφαιρίδια ως προς τον άξονα $z'z$ είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με τη στροφορμή του συστήματος των σφαιριδίων ως προς τον ίδιο άξονα.

Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο και έχει σταθερό μέτρο, η ροπή της ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερή. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σφαιρίδια ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερός. Συνεπώς, είναι:

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \frac{1}{2}F\ell \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}F\ell$$

$$\text{ή} \quad \frac{L_{\text{συστ}} - 0}{t_1 - 0} = \frac{1}{2}F\ell \quad \text{ή} \quad L_{\text{συστ}} = \frac{1}{2}F\ell t_1.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η στροφορμή του συστήματος των σφαιριδίων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{L}_{\text{συστ}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ οι στροφορμές των σφαιριδίων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα την ίδια χρονική στιγμή. Επειδή τα διανύσματα των στροφορμών $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν την ίδια φορά, το μέτρο της στροφορμής του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $L_{\text{συστ}} = L_1 + L_2$ ή $L_{\text{συστ}} = mv_1 \frac{\ell}{2} + mv_2 \frac{\ell}{2}$ (1), όπου v_1 και v_2 τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σφαιριδίων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 . Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$v_1 = \omega \frac{\ell}{2} \quad (2) \quad \text{και} \quad v_2 = \omega \frac{\ell}{2} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$v_1 = v_2 \quad (4).$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (4), έχουμε:

$$L_{\text{συστ}} = 2mv_1 \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}F\ell t_1 = mv_1 \ell$$

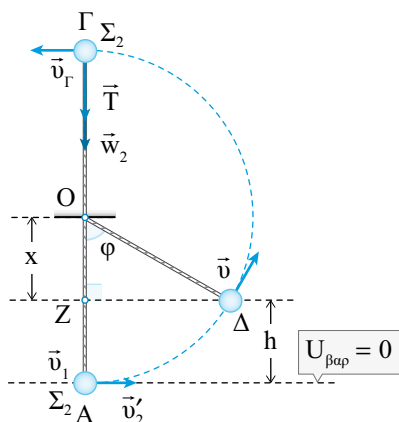
$$\text{ή} \quad v_1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t_1.$$

29. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω v_Γ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο ανώτερο σημείο Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση.

$$\text{Στο σημείο Γ ισχύει: } \Sigma F = F_\kappa \quad \text{ή} \quad T + mg = \frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$



Για να εκτελέσει το σώμα Σ_2 ανακύκλωση, πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$ ή, λόγω της σχέσης (1): $\frac{m_2 v_\Gamma^2}{\ell} - m_2 g \geq 0$ ή $v_\Gamma \geq \sqrt{g\ell}$.

Επειδή το σώμα Σ_2 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, το μέτρο της ταχύτητάς του στη θέση Γ είναι: $v_\Gamma = \sqrt{g\ell}$ (2).

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$ ή $K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_\Gamma^2 + m_2 g 2\ell$$

ή $v_2' = \sqrt{v_\Gamma^2 + 4g\ell}$ ή, λόγω της σχέσης (2):

$$v_2' = \sqrt{5g\ell}.$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } \sqrt{5g\ell} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} 2\sqrt{5g\ell}$$

$$\text{ή } m_1 + m_2 = 4m_1 \text{ ή } m_2 = 3m_1 \text{ ή } m_2 = 3m.$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 (θέση Δ).

Από το προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$\text{συν}\varphi = \frac{x}{\ell} \text{ ή } \text{συν}\varphi = \frac{\ell - h}{\ell}$$

$$\text{ή } h = \ell(1 - \text{συν}\varphi) \text{ ή } h = \frac{\ell}{2}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μεταξύ των θέσεων Α και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$ ή $K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 gh$$

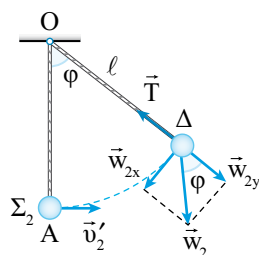
$$\text{ή } v = \sqrt{v_2'^2 - 2gh} \text{ ή } v = 2\sqrt{g\ell}.$$

Το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 ως προς τον άξονα $x'x$ υπολογίζεται από τη σχέση: $L = m_2 v \ell$

$$\text{ή } L = 3m(2\sqrt{g\ell})\ell \text{ ή } L = 6m\ell\sqrt{g\ell}.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία διέρχεται από τη θέση Δ είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ από το νήμα. Αναλύουμε το βάρος στις συνιστώσες $\vec{w}_{2x}$ και $\vec{w}_{2y}$ που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα. Η συνιστώσα $\vec{w}_{2y}$ έχει την ακτινική διεύθυνση στη θέση Δ, ενώ η συνιστώσα $\vec{w}_{2x}$ είναι κάθετη στην ακτινική διεύθυνση στην ίδια θέση.



Η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η συνιστώσα $\vec{w}_{2y}$ δεν δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο O, γιατί οι φορείς τους διέρχονται από τον άξονα αυτόν. Η μοναδική δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα $x'x$ είναι η συνιστώσα $\vec{w}_{2x}$. Επο-

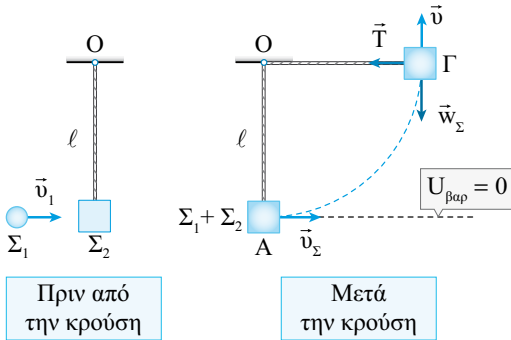
μένως, είναι: $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$ ή $\frac{dL}{dt} = \tau_{w_{2x}}$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = w_{2x} \ell \quad \text{ή } \frac{dL}{dt} = m_2 g \eta \mu \phi$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{2} m g \ell.$$

30. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\Sigma \quad \text{ή } v_1 = 4 v_\Sigma \quad (1).$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$L = (m_1 + m_2) v \ell \quad \text{ή } L = 4 m v \ell \quad \text{ή } v = \frac{L}{4 m \ell}$$

$$\text{ή } v = \sqrt{g \ell}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση, μεταξύ των θέσεων Α και Γ που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα, έχουμε: $E_{μηχ(A)} = E_{μηχ(\Gamma)}$

$$\text{ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\Sigma^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + (m_1 + m_2) g \ell$$

$$\text{ή } v_\Sigma = \sqrt{v^2 + 2 g \ell} \quad \text{ή } v_\Sigma = \sqrt{3 g \ell}.$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_1 = 4 \sqrt{3 g \ell}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t_1 είναι: το βάρος του $\vec{w}_\Sigma$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Η τάση $\vec{T}$ του νήματος δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα $x'x$. Συνεπώς, είναι: $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$ ή $\frac{dL}{dt} = \tau_{w_\Sigma}$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = (m_1 + m_2) g \ell \quad \text{ή } \frac{dL}{dt} = 4 m g \ell.$$

31. Σωστή επιλογή είναι η α .

Οι στροφορμές $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα (1) έχουν την ίδια φορά. Επομένως, το μέτρο L της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων ως προς τον άξονα (1) υπολογίζεται από τη σχέση: $L = L_1 + L_2$

$$\text{ή } L = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L = m_1 \left(\omega_0 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\ell}{2} + m_2 \left(\omega_0 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L = \frac{1}{4} m_1 \omega_0^2 \ell^2 + \frac{1}{4} m_2 \omega_0^2 \ell^2$$

$$\text{ή } L = \frac{3}{4} m \omega_0^2 \ell^2 \quad (1).$$

Έστω L' το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων ως προς τον άξονα (2).

Επειδή οι στροφορμές $\vec{L}'_1$ και $\vec{L}'_2$ των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα (2) έχουν την ίδια φορά, το μέτρο L' της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων ως προς τον άξονα αυτόν υπολογίζεται από τη σχέση: $L' = L'_1 + L'_2$

$$\text{ή } L' = m_1 v'_1 (A\Delta) + m_2 v'_2 (\Gamma\Delta)$$

$$\text{ή } L = m_1 \left(\omega \frac{\ell}{3} \right) \frac{\ell}{3} + m_2 \left(\omega \frac{2\ell}{3} \right) \frac{2\ell}{3}$$

$$\text{ή } L' = m_1 \omega \frac{\ell^2}{9} + m_2 \omega \frac{4\ell^2}{9}$$

$$\text{ή } L' = \frac{1}{9} m \omega \ell^2 + \frac{8}{9} m \omega \ell^2$$

$$\text{ή } L' = m \omega \ell^2 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $L = L'$

$$\text{ή } m \omega \ell^2 = \frac{3}{4} m \omega_0 \ell^2 \quad \text{ή } \omega = \frac{3}{4} \omega_0.$$

32. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v_1 = \omega d \quad \text{ή } v_1 = \frac{1}{4} \omega \ell \quad (1).$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $v_2 = \omega(\ell - d)$ ή $v_2 = \frac{3}{4} \omega \ell$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$v_2 = 3v_1 \quad (3).$$

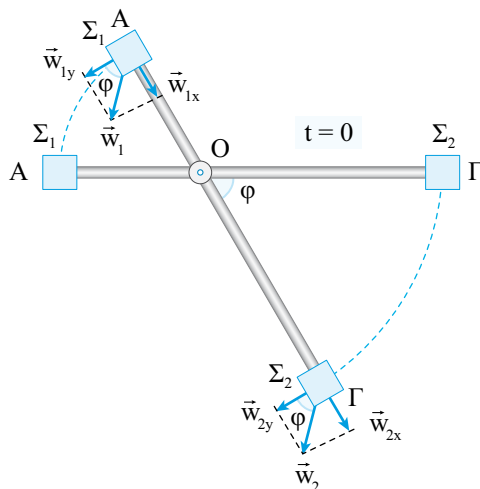
Οι στροφορμές $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 έχουν την ίδια φορά. Επομένως, το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $L = L_1 + L_2$ ή $L = m_1 v_1 d + m_2 v_2 (\ell - d)$

$$\text{ή } L = m v_1 \frac{\ell}{4} + 3m v_2 \frac{3\ell}{4} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης}$$

$$(3): L = 7m v_1 \ell.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα είναι: τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής.



Η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής δεν δημιουργεί ροπή. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \Sigma \tau_{\epsilon\zeta} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2}$$

$$\dot{\left(\frac{dL}{dt}\right)}_{\text{συστ}} = -w_{1y}d + w_{2y}(\ell - d)$$

$$\dot{\left(\frac{dL}{dt}\right)}_{\text{συστ}} = -m_1 g \sin \varphi \frac{\ell}{4} + m_2 g \sin \varphi \frac{3\ell}{4}$$

$$\dot{\left(\frac{dL}{dt}\right)}_{\text{συστ}} = -\frac{1}{8}mg\ell + \frac{9}{8}mg\ell$$

$$\dot{\left(\frac{dL}{dt}\right)}_{\text{συστ}} = mg\ell.$$

33. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου ΑΓ και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα (1) είναι σταθερός και ίσος με τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$.

Συνεπώς, ισχύει: $\frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = \Sigma \tau_{\epsilon\xi}$

$$\dot{\frac{L_1 - 0}{t}} = F \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad L_1 = \frac{1}{2}F\ell t \quad (1).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου ΚΛ και των σημειακών σωμάτων Σ_3 και Σ_4 ως προς τον άξονα (2) είναι σταθερός και ίσος με τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$.

Συνεπώς, ισχύει: $\frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = \Sigma \tau_{\epsilon\xi}$

$$\dot{\frac{L_2 - 0}{t}} = F \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad L_2 = \frac{1}{2}F\ell t \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $L_1 = L_2$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Τα διανύσματα των στροφορμών των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα (1) τη χρονική στιγμή t έχουν την ίδια φορά. Επομένως, το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα (1) τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$L_1 = L_{\Sigma_1} + L_{\Sigma_2} \quad \text{ή} \quad L_1 = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή} \quad L_1 = m_1 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\text{ή} \quad L_1 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)\omega_1 \ell^2 \quad (3).$$

Τα διανύσματα των στροφορμών των σωμάτων Σ_3 και Σ_4 ως προς τον άξονα (2) τη χρονική στιγμή t έχουν την ίδια φορά. Επομένως, το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_2$ του συστήματος των σωμάτων Σ_3 και Σ_4 ως προς τον άξονα (2) τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$L_2 = L_{\Sigma_3} + L_{\Sigma_4} \quad \text{ή} \quad L_2 = m_3 v_3 \frac{\ell}{2} + m_4 v_4 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή} \quad L_2 = m_3 \omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_4 \omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

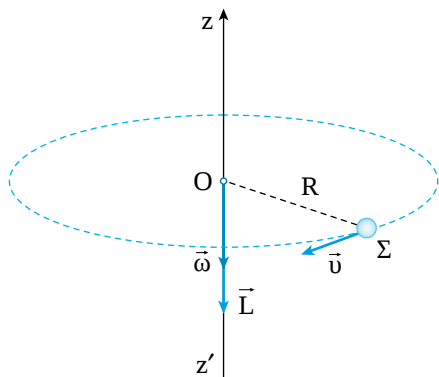
$$\text{ή} \quad L_2 = \frac{1}{4}(m_3 + m_4)\omega_2 \ell^2 \quad (4).$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t είναι $L_1 = L_2$, από τις σχέσεις (3) και (4), έχουμε:

$$\frac{1}{4}(m_1 + m_2)\omega_1 \ell^2 = \frac{1}{4}(m_3 + m_4)\omega_2 \ell^2$$

$$\text{ή} \quad 4m\omega_1 = m\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \frac{\omega_2}{4}.$$

34. α. Το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$ του υλικού σημείου Σ έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής $z'z$ και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Επειδή το υλικό σημείο Σ περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, η φορά του διανύσματος $\vec{L}$ της στροφορμής του είναι προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



β. Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}$ του υλικού σημείου υπολογίζεται από τη σχέση:

$L = m v R$ (1), όπου v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση: $v = \omega R$ (2).

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $L = m \omega R^2$ ή $L = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

γ. Επειδή η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα $z'z$ παραμένει σταθερή, ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \quad \text{ή} \quad \Sigma \tau = 0.$$

δ. Έστω $\Delta\theta$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του υλικού σημείου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$. Είναι: $\Delta\theta = \omega \Delta t$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 160 \text{ rad}.$$

35. α. Όπως προκύπτει από το διάγραμμα, το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $L_0 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Έστω v_0 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$.

$$\text{Είναι: } L_0 = m v_0 R \quad \text{ή} \quad v_0 = \frac{L_0}{m R} \quad \text{ή} \quad v_0 = 10 \text{ m/s}.$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$v_0 = \omega_0 R \quad \text{ή} \quad \omega_0 = \frac{v_0}{R} \quad \text{ή} \quad \omega_0 = 20 \text{ rad/s}.$$

β. Έστω v και ω τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας αντίστοιχα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι } v = \omega R \text{ (1).}$$

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα, το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 είναι $L_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Είναι:

$$L_1 = m v R \quad \text{ή} \quad L_1 = m \omega R^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{L_1}{m R^2}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 40 \text{ rad/s}.$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ροπής τ της δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο ως προς τον άξονα $z'z$ είναι ίση με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον ίδιο άξονα. Δηλαδή, είναι: $\tau = \frac{dL}{dt}$ (2).

Επειδή η ροπή τ της δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερή, ισχύει:

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \tau = \frac{L_1 - L_0}{t_1 - 0} \quad \text{ή} \quad FR = \frac{L_1 - L_0}{t_1}$$

$$\text{ή} \quad F = \frac{L_1 - L_0}{Rt_1} \quad \text{ή} \quad F = 4 \text{ N}.$$

δ. Επειδή το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας θα αυξάνεται και αυτό με σταθερό ρυθμό.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του υλικού σημείου. Είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_0}{t_1 - 0}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 40 \text{ rad/s}^2.$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta$ του υλικού σημείου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 15 \text{ rad}.$$

Το πλήθος N των περιστροφών που εκτελεί το υλικό σημείο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (7,5/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

36. α. Είναι: $L_0 = m v_0 R$ ή $L = m \omega_0 R^2$

$$\text{ή} \quad \omega_0 = 40 \text{ rad/s}.$$

β. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $L_1 = m v_1 R$

$$\text{ή} \quad L_1 = m \omega_1 R^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 20 \text{ rad/s}.$$

γ. Είναι: $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$ ή $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \tau$ ή $\tau = \frac{L_1 - L_0}{t_1 - 0}$

$$\text{ή} \quad \tau = -2,5 \text{ Nm} \quad \text{ή} \quad |\tau| = 2,5 \text{ Nm}.$$

δ. Επειδή το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου μειώνεται με σταθερό ρυθμό, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητάς του θα μειώνεται και αυτό με σταθερό ρυθμό.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του υλικού σημείου. Είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - 0} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = -5 \text{ rad/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται το υλικό σημείο είναι: $\omega_1 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t_2$

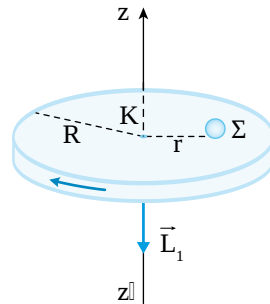
$$\text{ή} \quad 0 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t_2 \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} \quad \text{ή} \quad t_2 = 8 \text{ s}.$$

ε. Είναι: $\Delta\theta = \omega_0 (t_2 - 0)^2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} (t_2 - 0)^2$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta = 160 \text{ rad}. \text{ Επομένως, είναι: } N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad N = (80/\pi) \text{ περιστροφές}.$$

37. α. Το σημειακό σώμα Σ περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (όπως ο δίσκος) διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από το κέντρο του δίσκου. Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του σημειακού σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 έχει τη διεύθυνση του άξονα $z'z$ και φορά προς τα κάτω (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).



Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ του σημειακού σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$L_1 = m v_1 r$ (1), όπου v_1 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 .

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 20 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο v_1 της γραμμικής ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_1 = \omega_1 r$ ή $v_1 = 10 \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $L_1 = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

β. Έστω v_2 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $L_2 = m v_2 r$ ή $v_2 = 16 \text{ m/s}$.

Το μέτρο ω_2 της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_2 = \omega_2 r$ ή $\omega_2 = 32 \text{ rad/s}$.

Η χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $t_2 = 8 \text{ s}$.

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 128 \text{ rad.}$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = (64/\pi) \text{ περιστροφές.}$$

γ. Έστω $\vec{\tau}$ η ροπή της δύναμης που ασκείται στο σημειακό σώμα Σ από τον δίσκο ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_2 . Επειδή η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, η στροφορμή του σημειακού σώματος Σ ως προς τον άξονα $z'z$ θα με-

ταβάλλεται και αυτή με σταθερό ρυθμό. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερός. Το μέτρο της ροπής της δύναμης που ασκείται το σημειακό σώμα Σ από τον δίσκο ως προς τον άξονα $z'z$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad \text{ή} \quad \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \tau = \frac{L_2 - 0}{t_2 - 0}$$

$$\text{ή} \quad \tau = 0,01 \text{ Nm.}$$

δ. Έστω $\Delta\theta'$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta' = \omega_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1)^2$$

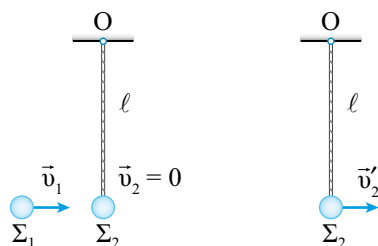
$$\text{ή} \quad \Delta\theta' = 78 \text{ rad.}$$

Το μήκος του τόξου που διανύει ένα υλικό σημείο της περιφέρειας του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$s = R\Delta\theta' \quad \text{ή} \quad s = 78 \text{ m.}$$

38. α. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = 5 \text{ m/s.}$$



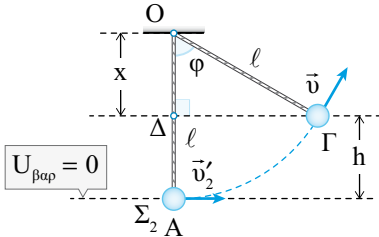
Ακριβώς πριν
από την κρούση

Αμέσως μετά
την κρούση

Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}$ του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = m_2 v'_2 \ell \quad \text{ή} \quad L = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 .



Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}$, εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση (θέση Α) έως τη χρονική στιγμή t_1 (θέση Γ). Είναι:

$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \quad (1).$$

Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Α, η σχέση (1)

$$\text{γράφεται: } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 gh$$

ή $v = \sqrt{v_2'^2 - 2gh}$ (2), όπου h το ύψος του σώματος Σ_2 πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Α τη χρονική στιγμή t_1 . Από το ορθογώνιο τρίγωνο

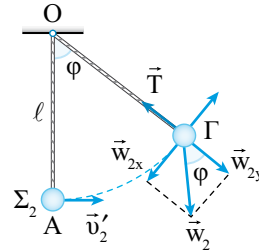
$$\text{ΟΔΓ έχουμε: } \sin\varphi = \frac{(\text{ΟΔ})}{(\text{ΟΓ})} \quad \text{ή} \quad \sin\varphi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή} \quad \sin\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \text{ή} \quad h = \ell(1 - \sin\varphi) \quad \text{ή} \quad h = 0,8 \text{ m}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $v = 3 \text{ m/s}$.

Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}'$ του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $L' = m_2 v \ell$

$$\text{ή} \quad L' = 14,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

γ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα.



Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}_2$ του σώματος Σ_2 σε δύο συνιστώσες: στη συνιστώσα δύναμη $\vec{w}_{2y}$ που έχει την ακτινική διεύθυνση στο σημείο Γ και στη συνιστώσα δύναμη $\vec{w}_{2x}$ που είναι κάθετη στην ακτινική διεύθυνση στο σημείο Γ. Η δύναμη $\vec{T}$ που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το νήμα και η συνιστώσα δύναμη $\vec{w}_{2y}$ δεν δημιουργούν ροπές ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 , διότι οι φορείς τους διέρχονται από τον άξονα αυτόν. Όμως, η συνιστώσα δύναμη $\vec{w}_{2x}$ δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 (ο φορέας της δεν διέρχεται από τον άξονα $z'z$).

Συνεπώς, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = \tau_{w_x} \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = w_x \ell$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = m_2 g \eta \mu \varphi \ell \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = 24\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

39. α. Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του σώματος Σ_1 έχει τη διεύθυνση του άξονα (1) και φορά προς τα κάτω. Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ υπολογίζεται από τη σχέση: $L_1 = m_1 v_1 d$
ή $L_1 = m_1 \omega d^2$ ή $L_1 = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Η στροφορμή $\vec{L}_2$ του σώματος Σ_2 έχει τη διεύθυνση του άξονα (1) και φορά προς τα κάτω. Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_2$ υπολογίζεται από τη σχέση: $L_2 = m_2 v_2 (\ell - d)$
ή $L_2 = m_2 \omega (\ell - d)^2$ ή $L_2 = 5,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

β. Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:
 $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1).

Επειδή τα διανύσματα $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (1) γράφεται:

$$L = L_1 + L_2 \text{ ή } L = 5,92 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

γ. Έστω $\vec{L}'_1$ και $\vec{L}'_2$ οι στροφορμές των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα (2). Η στροφορμή $\vec{L}'$ του συστήματος ως προς τον άξονα (2) δίνεται από τη σχέση: $\vec{L}' = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2$ (2).

Επειδή τα διανύσματα $\vec{L}'_1$ και $\vec{L}'_2$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (2) γράφεται: $L' = L'_1 + L'_2$

$$\text{ή } L' = m_1 v'_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v'_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L' = m_1 \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L' = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega \ell^2 \text{ ή } L' = 7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

40. α. Έστω v_1 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $L_1 = m v_1 \ell$ ή $v_1 = 50 \text{ m/s}$.

β. Έστω $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt}$ το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος –

σώμα Σ . Είναι: $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\text{εξωτ}}$

$$\text{ή } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_{F_1} \quad (1).$$

Επειδή η ροπή της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερή, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερός. Συνεπώς, ισχύει:

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} \text{ ή } \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = \frac{L - 0}{t_1 - 0}$$

$$\text{ή } \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

γ. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = F_1 \frac{\ell}{2} \text{ ή } F_1 = \frac{2 \frac{dL}{dt}}{\ell} \text{ ή } F_1 = 40 \text{ N}.$$

δ. Ισχύει: $\frac{dL'_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau'_{\text{εξωτ}}$

$$\text{ή } \frac{dL'_{\text{συστ}}}{dt} = F_1 \frac{\ell}{2} - F_2 \ell \text{ ή } 0 = F_1 \frac{\ell}{2} - F_2 \ell$$

$$\text{ή } F_2 = \frac{F_1}{2} \text{ ή } F_2 = 20 \text{ N}.$$

ε. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$v_1 = \omega_1 \ell \text{ ή } \omega_1 = 25 \text{ rad/s}.$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2$. Η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ του συστήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \text{ ή } \Delta\theta_1 = 62,5 \text{ rad}.$$

Η γωνία στροφής $\Delta\theta_2$ του συστήματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\theta_2 = \omega_1 \Delta t$

$$\text{ή } \Delta\theta_2 = \omega_1(t_2 - t_1) \quad \text{ή } \Delta\theta_2 = 87,5 \text{ rad.}$$

Συνεπώς, είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$

$$\text{ή } \Delta\theta = 150 \text{ rad.}$$

41. α. Είναι: $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi}$

$$\text{ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = F\left(\frac{\ell}{2} - d\right)$$

$$\text{ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

β. Έστω $\vec{L}$ η στροφορμή του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t}$$

$$\text{ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = \frac{L - 0}{t_1 - 0} \quad \text{ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} = \frac{L}{t_1}$$

$$\text{ή } L = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συστ}} \cdot t_1 \quad \text{ή } L = 80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

γ. Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα τη χρονική στιγμή t_1 ισούται με τη στροφορμή του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Συνεπώς, είναι: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1), όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ οι στροφορμές των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 .

Τα διανύσματα L_1 και L_2 έχουν την ίδια φορά, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $L = L_1 + L_2$ ή

$$L = m_1 v_1 d + m_2 v_2 (\ell - d) \quad (2) \quad \text{όπου } v_1 \text{ και } v_2 \text{ τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σωμάτων } \Sigma_1 \text{ και } \Sigma_2 \text{ τη χρονική στιγμή } t_1.$$

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$v_1 = \omega d \quad (3) \quad \text{και } v_2 = \omega(\ell - d) \quad (4).$$

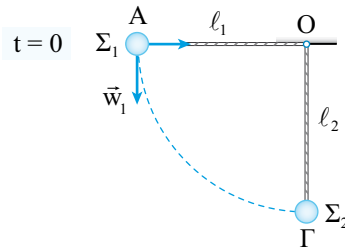
Η σχέση (2), λόγω των σχέσεων (3) και (4), γίνεται: $L = m_1 \omega d^2 + m_2 \omega (\ell - d)^2$

$$\text{ή } L = [m_1 d^2 + m_2 (\ell - d)^2] \omega \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει: $v_1 = 20 \text{ m/s}$ και $v_2 = 40 \text{ m/s}$.

δ. Είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2,5 \text{ rad/s}^2$.

42. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημειακό σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η τάση $\vec{T}_1$ από το νήμα (1).



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$

$$\text{τη χρονική στιγμή } t = 0 \text{ είναι: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}$$

$$\text{ή } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{T_1} \quad (1).$$

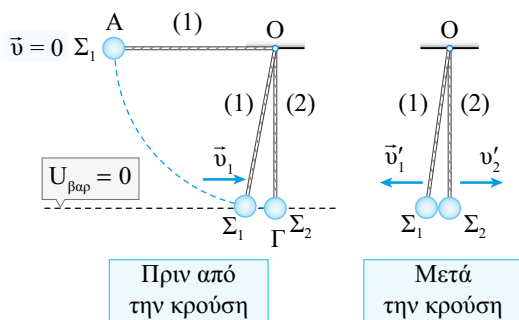
Επειδή η τάση $\vec{T}_1$ του νήματος διέρχεται από τον άξονα $x'x$, η ροπή της ως προς τον άξονα αυτόν είναι ίση με μηδέν ($\vec{\tau}_{T_1} = \vec{0}$).

$$\text{Επομένως, η σχέση (1) γράφεται: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{w_1}$$

$$\text{ή } \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = |\vec{\tau}_{w_1}| \quad \text{ή } \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = w_1 \ell_1 \quad \text{ή } \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = m_1 g \ell_1$$

$$\text{ή } \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = 36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

β. Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σημειακού σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση με το σημειακό σώμα Σ_2 .



Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$\text{ή} \quad 0 + m_1 g \ell_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{2g\ell_1}$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 6 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } \Delta L = L_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad \Delta L = L_{1(\text{πριν})} \quad (2).$$

Επιλέγοντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, η σχέση (2) γράφεται: $\Delta L = +L_{1(\text{πριν})}$ ή $\Delta L = +m_1 v_1 \ell_1$

$$\text{ή} \quad \Delta L = +21,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

γ. Έστω $\vec{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή η κρούση είναι

$$\text{ελαστική, ισχύει: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v'_1 = -2 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{L}_1 = \vec{L}_{1(\text{μετά})} - \vec{L}_{1(\text{πριν})} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

$$\Delta L_1 = L_{1(\text{μετά})} - L_{1(\text{πριν})}.$$

ή, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη:

$$\Delta L_1 = -m_1 |v'_1| \ell_1 - m_1 v_1 \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta L_1 = -m_1 (|v'_1| + v_1) \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta L_1 = -28,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

δ. Έστω $\vec{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

Έστω $\vec{L}_{2(\text{μετά})}$ η στροφορμή του σημειακού σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση και $\vec{L}_{\text{ολ}}$ η στροφορμή του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } \vec{L}_{\text{ολ}} = \vec{L}_{1(\text{μετά})} + \vec{L}_{2(\text{μετά})}$$

$$\text{ή, αλγεβρικά: } L_{\text{ολ}} = L_{1(\text{μετά})} + L_{2(\text{μετά})}$$

ή, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη:

$$L_{\text{ολ}} = -m_1 |v'_1| \ell_1 + m_2 v'_2 \ell_2$$

$$\text{ή} \quad L_{\text{ολ}} = 21,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

43. α. Επειδή, όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του υλικού σημείου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 , η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του υλικού σημείου σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι σταθερή. Επομένως, είναι: $\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ ή $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2-0,4}{2-0} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ή $\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

Επομένως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του υλικού σημείου είναι: $\frac{dL}{dt} = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

β. Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής που ασκείται στο υλικό σημείο ως προς τον άξονα $z'z$ στο χρονικό διάστημα Δt_1 είναι ίση με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον άξονα $z'z$ στο ίδιο χρονικό διάστημα. Είναι:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} = \frac{dL}{dt} \quad \text{ή} \quad F_1 R = \frac{dL}{dt}$$

$$\text{ή} \quad F_1 = 4 \text{ N}.$$

γ. Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του υλικού σημείου μειώνεται με σταθερό ρυθμό: $\frac{dL'}{dt} = -0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$. Έχουμε:

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\Delta L'}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad -0,4 = \frac{0-2}{t_2-2} \quad \text{ή} \quad t_2 = 7 \text{ s}.$$

δ. Επειδή το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 μειώνεται με σταθερό ρυθμό, το υλικό σημείο εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Επομένως, η ροπή της δύναμης $\vec{F}_2$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της ροπής της δύναμης $\vec{F}_1$.

Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής που ασκείται στο υλικό σημείο ως προς τον άξονα $z'z$ στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 , είναι ίση με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον άξονα $z'z$ στο ίδιο χρονικό διάστημα. Είναι:

$$\Sigma \tau' = \frac{dL'}{dt} \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{F_2} = \frac{dL'}{dt}$$

$$\text{ή} \quad F_1 R - F_2 R = \frac{dL'}{dt}$$

$$\text{ή} \quad F_2 = F_1 - \frac{\frac{dL'}{dt}}{R} \quad \text{ή} \quad F_2 = 6 \text{ N}.$$

ε. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $L_0 = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Έστω ω_0 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι:

$$L = m v_0 R \quad \text{ή} \quad L = m \omega_0 R^2 \quad \text{ή} \quad \omega_0 = 50 \text{ rad/s}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $L_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$L_1 = m v_1 R \quad \text{ή} \quad L_1 = m \omega_1 R^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 250 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα Δt_1 . Είναι: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Delta t_1$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t_1}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 100 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα Δt_1 . Είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} (\Delta t_1)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 300 \text{ rad.}$$

Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα, το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_2 είναι $L_2 = 0$. Επομένως, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_2 είναι $\omega_2 = 0$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα Δt_2 . Είναι: $\omega_2 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \Delta t_2$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 50 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα Δt_2 . Είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_1 \Delta t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} (\Delta t_2)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\theta_2 = 625 \text{ rad.}$$

Επομένως, η γωνία στροφής που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του υλικού σημείου από τη

χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ ή $\Delta\theta = 925 \text{ rad.}$

44. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του. Στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του συσσωματώματος, ισχύει:

$$\Sigma F_{\text{ακτ}} = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad T + w = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g.$$

Για να εκτελέσει ανακύκλωση το συσσωμάτωμα, πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$

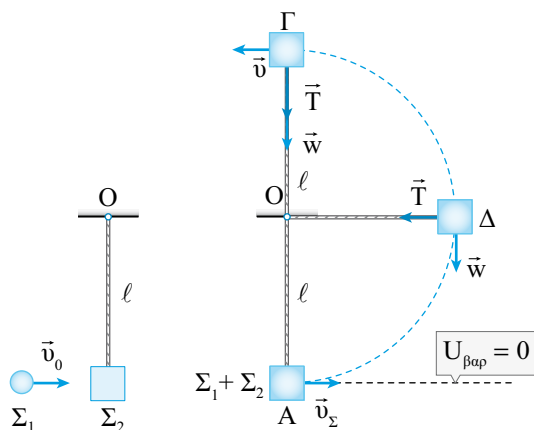
$$\text{ή} \quad \frac{(m_1 + m_2)v^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g \geq 0$$

$$\text{ή} \quad v \geq \sqrt{g\ell}.$$

Επειδή, σύμφωνα με την εκφώνηση, το συσσωμάτωμα μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, ισχύει: $v = \sqrt{g\ell}$ ή $v = 2\sqrt{5} \text{ m/s.}$

Το μέτρο της στροφορμής $\bar{L}$ του συσσωματώματος στην ανώτερη θέση της τροχιάς του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = (m_1 + m_2)v\ell \quad \text{ή} \quad L = 20\sqrt{5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$



β. Έστω v_{Σ} το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Α στη θέση Γ, μετά την κρούση, έχουμε: $E_{μνηλ(A)} = E_{μνηλ(Γ)}$ ή

$$K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\Sigma}^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (m_1 + m_2)g2\ell$$

$$\text{ή } v_{\Sigma} = 10 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v_{\Sigma} \quad \text{ή } v_0 = 50 \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της στροφορμής $\bar{L}_1$ του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$L_1 = m_1 v_0 \ell \quad \text{ή } L_1 = 100 \text{ kg m}^2/\text{s.}$$

γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συσσωματώματος ως προς τον άξονα $x'x$ κατά την κίνησή του από την κατώτερη έως την ανώτερη θέση της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση γίνεται μέγιστο στη θέση όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά μετά την κρούση

$$(\text{θέση } \Delta). \text{ Είναι: } \left| \frac{dL}{dt} \right|_{\max} = \Sigma \tau \quad \text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right|_{\max} = \tau_w$$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right|_{\max} = (m_1 + m_2)g\ell$$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right|_{\max} = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

45. α. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή } \tau_{F_{αξ}} + \tau_{F_1} + \tau_{F_2} = 0$$

$$\text{ή } 0 + F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2 = 0 \quad \text{ή } F_2 = 8 \text{ N.}$$

β. Είναι:

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \Sigma \tau_{εξ} \quad \text{ή } \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = F_2 \ell_2$$

$$\text{ή } \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

γ. Έστω L_1 το μέτρο της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σώμα Σ τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος είναι σταθερός, ισχύει:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = F_2 \ell_2 \quad \text{ή } \frac{L_1 - 0}{t_1} = F_2 \ell_2$$

$$\text{ή } L_1 = F_2 \ell_2 t_1 \quad \text{ή } L_1 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

Έστω L_{Σ} το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, το μέτρο της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σώμα Σ είναι κάθε χρονική στιγμή ίσο με το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ . Επομένως, είναι:

$$L_{\Sigma} = L_1 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

δ. Έστω v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$L_{\Sigma} = mv\ell \quad \text{ή } v = 8 \text{ m/s.}$$

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$v = \omega \ell \quad \text{ή } \omega = 8 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad \text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2.$$

ε. Το σώμα Σ τη χρονική στιγμή t_1 έχει επιτόρ-
χια επιτάχυνση $\vec{a}_e$ και κεντρομόλο επιτάχυν-
ση $\vec{a}_κ$.

Το μέτρο της επιτόρχιας επιτάχυνσης του σώ-
ματος Σ είναι σταθερό και ίσο με:

$$\alpha_e = \alpha_{\gamma\omega\nu} \ell \quad \text{ή} \quad \alpha_e = 4 \text{ m/s}^2.$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του
σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται
από τη σχέση:

$$\alpha_κ = \omega^2 \ell \quad \text{ή} \quad \alpha_κ = 64 \text{ m/s}^2.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}_e$ και $\vec{a}_κ$ είναι κάθετα
μεταξύ τους, το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}$ του
σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } \alpha = \sqrt{\alpha_κ^2 + \alpha_e^2}$$

$$\text{ή } \alpha = \sqrt{4.112} \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_κ = 64,12 \text{ m/s}^2.$$

46. α. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύ-
τητας του συστήματος ράβδος – σημειακά σώ-
ματα τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$v_1 = \omega \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \omega = 30 \text{ rad/s}.$$

Το μέτρο v_2 της γραμμικής ταχύτητας του σώ-
ματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } v_2 = \omega \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad v_2 = 30 \text{ m/s}.$$

Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_1$ του σώματος Σ_1
τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $L_1 = m_1 v_1 \frac{\ell}{2}$

$$\text{ή } L_1 = 30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}_2$ του σώματος Σ_2
τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $L_2 = m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$

$$\text{ή } L_2 = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Τα διανύσματα των στροφορμών $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$
είναι κάθετα στη σελίδα, με φορά από τη σε-
λίδα προς τον αναγνώστη (σύμφωνα με τον

κανόνα του δεξιού χεριού). Η στροφορμή $\vec{L}$
του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1
και Σ_2 δίνεται από τη σχέση: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1).

Επειδή τα διανύσματα $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν την
ίδια φορά, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{ή} \quad L = 90 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

β. Είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 6 \text{ rad/s}^2$.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του
συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα δίνε-
ται από τη σχέση: $\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi}$ (2).

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο
σύστημα είναι: τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των σω-
μάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από
τον άξονα περιστροφής και οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και
 $\vec{F}_2$ του ζεύγους δυνάμεων. Τα βάρη $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$
και η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ δεν δημιουργούν ροπές ως
προς τον άξονα $z'z$. Συνεπώς, η σχέση (2) γί-
νεται: $\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \tau_{\text{ζεύγους}} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = F_1 d$
(3), όπου d ο μοχλοβραχίονας του ζεύγους δυ-
νάμεων.

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι ο ρυθμός με-
ταβολής της στροφορμής του συστήματος εί-
ναι σταθερός, οπότε μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\text{εξής: } \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{L_{\text{τελ}} - L_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = \frac{L - 0}{t_1 - 0}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = 18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Επομένως, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:
 $d = 0,36 \text{ m}$.

δ. Είναι: $\left| \frac{dL}{dt} \right|_{\text{συστ}} = |\Sigma \tau_{\varepsilon \xi}|$

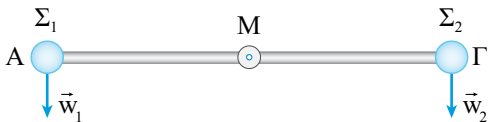
ή $\left| \frac{dL}{dt} \right|_{\text{συστ}} = F_2 \left(\frac{\ell}{2} - d \right)$

ή $\left| \frac{dL}{dt} \right|_{\text{συστ}} = 32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

47. α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από τη

σχέση: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}$ ή $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{w_2}$

ή, αλγεβρικά: $\frac{dL}{dt} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2} \quad (1)$.



Θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, η σχέση (1) γράφεται:

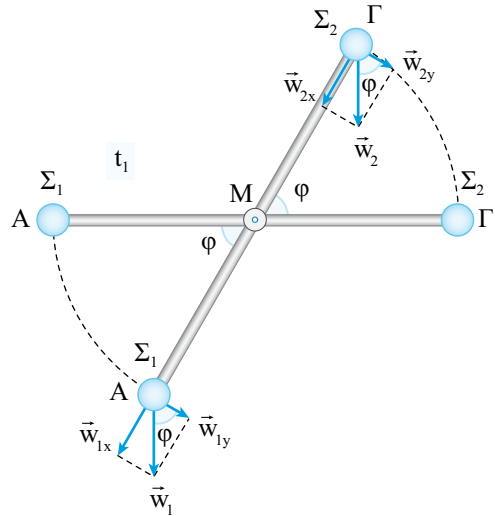
$$\frac{dL}{dt} = w_1 \frac{\ell}{2} - w_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = (m_1 - m_2)g \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = +50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

β. Επειδή η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

θετική, το σύστημα στρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή

t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}$

ή $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{w_2}$

ή, αλγεβρικά: $\frac{dL}{dt} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2}$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = w_{1y} \frac{\ell}{2} - w_{2y} \frac{\ell}{2}$$

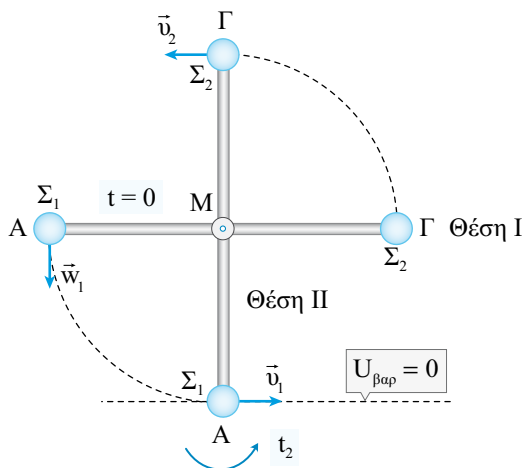
$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = m_1 g \sigma \nu \varphi \frac{\ell}{2} - m_2 g \sigma \nu \varphi \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = (m_1 - m_2) g \sigma \nu \varphi \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = +25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

γ. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδου – σημειακά σώματα τη χρονική στιγμή t_2 . Τα μέτρα v_1 και v_2 των γραμμικών ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2

αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_2 δίνονται από τις σχέσεις: $v_1 = \omega \frac{\ell}{2}$ (2) και $v_2 = \omega \frac{\ell}{2}$ (3).



Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση του συστήματος από την αρχική του θέση (Θέση I) στην τελική του θέση (Θέση II), θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_1 , έχουμε: $E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}}$

$$\text{ή } K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή } 0 + m_1 g \frac{\ell}{2} + m_2 g \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g \ell$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 g \ell + \frac{1}{2} m_2 g \ell = \frac{1}{2} m_1 \left(\omega \frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\omega \frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 g \ell$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 g \ell - \frac{1}{2} m_2 g \ell = \frac{1}{8} m_1 \omega^2 \ell^2 + \frac{1}{8} m_2 \omega^2 \ell^2$$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{4(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)\ell}} \quad \text{ή } \omega = 2 \text{ rad/s.}$$

Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (4) όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ οι στροφορμές των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_2 .

Επειδή οι στροφορμές $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, η σχέση (4) γράφεται:

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{ή } L = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L = m_1 \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega \ell^2$$

$$\text{ή } L = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

48. α. Έστω v_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σημειακού σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ της τροχιάς του, πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ, έχουμε:

$$E_{\text{μηχ(Α)}} = E_{\text{μηχ(Γ)}} \quad \text{ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } |v_1| = \sqrt{v_0^2 + 2gR} \quad \text{ή } |v_1| = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_1 = +5 \text{ m/s.}$$

Έστω L_1 το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $L_1 = m_1 |v_1| R$

$$\text{ή } L_1 = 2,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

β. Έστω v_1' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Γ και Α της τροχιάς του μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή } K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_A + U_A$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g R$$

$$\text{ή } |v_1'| = \sqrt{2gR} \quad \text{ή } |v_1'| = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_1' = -3 \text{ m/s.}$$

Έστω L_1' το μέτρο της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$L_1' = m_1 |v_1'| R \quad \text{ή } L_1' = 1,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

γ. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } m_2 = 4 \text{ kg.}$$

Έστω v_2' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_2 αμέσως μετά την

$$\text{κρούση. Είναι: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v_2' = +2 \text{ m/s} \quad \text{ή } |v_2'| = 2 \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ αμέσως μετά την κρούση είναι: $L_2' = m_2 |v_2'| \ell$

$$\text{ή } L_2' = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

Έστω $\vec{L}_{\text{ολ}}$ η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$

αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$\vec{L}_{\text{ολ}} = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' \quad (1).$$

Η στροφορμή $\vec{L}_1'$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_1 με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, ενώ η στροφορμή $\vec{L}_2'$ ως προς τον ίδιο άξονα είναι κάθετη στο επίπεδο τη κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, τότε η σχέση (1) γράφεται:

$$L_{\text{ολ}} = -L_1' + L_2' \quad \text{ή } L_{\text{ολ}} = +2,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{ή } |L_{\text{ολ}}| = 2,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

δ. Έστω $\Delta \vec{L}_1$ η μεταβολή της στροφορμής τού σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ εξαιτίας της κρούσης. Είναι: $\Delta \vec{L}_1 = \vec{L}_{1(\text{μετά})} - \vec{L}_{1(\text{πριν})}$

ή $\Delta \vec{L}_1 = \vec{L}_1' - \vec{L}_1$ ή θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη:

$$\Delta L_1 = -L_1' - L_1$$

$$\text{ή } \Delta L_1' = -3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{ή } |\Delta L_1'| = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

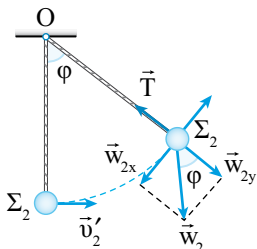
Έστω $\Delta \vec{L}_2$ η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ εξαιτίας της κρούσης. Είναι: $\Delta \vec{L}_2 = \vec{L}_{2(\text{μετά})} - \vec{L}_{2(\text{πριν})}$

$$\text{ή } \Delta \vec{L}_2 = \vec{L}_2' \quad \text{ή } \Delta L_2 = +3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{ή } |\Delta L_2| = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

ε. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα σχηματίζει για πρώτη φορά μετά την κρούση γω-

νία $\varphi = 30^\circ$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Ο είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ από το νήμα.



Αναλύουμε το βάρος σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{w}_{2x}$ και $\vec{w}_{2y}$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Έστω $\frac{dL}{dt}$ το μέτρο του ζητούμενου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_2

ως προς τον άξονα $x'x$. Είναι: $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = \tau_{w_{2x}} \quad \text{ή } \frac{dL}{dt} = w_{2x} \ell$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = m_2 g \eta \mu \varphi \ell$$

$$\text{ή } \frac{dL}{dt} = 9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

2.6 Διατήρηση της Στροφορμής

ΘΕΜΑΤΑ Α

A. Θέματα πολλαπλής επιλογής

4. γ	5. δ	6. δ	7. β
8. γ	9. δ	10. γ	11. β

B. Θέματα του τύπου Σωστό/Λάθος

12.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
13.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Λ

14. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το μέτρο ω της τελικής γωνιακής ταχύτητας της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 - \frac{75}{100}\omega_0 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{4}\omega_0 \quad (1).$$

Επειδή η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, ισχύει: $\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}}$

$$\text{ή} \quad 2m\nu_0 r = 2m\nu \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \omega_0 r^2 = \omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1):} \quad r = \frac{\ell}{4}.$$

15. Α. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σφαιρίδιο δεν δημιουργεί ροπή ως προς το σημείο Κ. Συνεπώς, η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή. Ισχύει: $\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}}$

$$\text{ή} \quad m\nu_0 R_1 = m\nu R_2$$

$$\text{ή} \quad \omega_0 R_1^2 = \omega R_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_0 R_1^2 = \omega \frac{R_1^2}{16}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 16\omega_0 \quad (1).$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\vec{T}$ η τάση του νήματος που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα, όταν διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R_1 .

Η τάση $\vec{T}$ του νήματος λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Επειδή το νήμα είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης $\vec{T}$. Συνεπώς, ισχύει:

$$F = T \quad \text{ή} \quad F = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad F = \frac{m\nu_0^2}{R_1}$$

$$\text{ή} \quad F = \frac{m(\omega_0 R_1)^2}{R_1} \quad \text{ή} \quad F = m\omega_0^2 R_1 \quad (2).$$

Έστω F' το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος, όταν το σφαιρίδιο διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R_2 .

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, το μέτρο F' της δύναμης που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος είναι ίσο με το μέτρο της νέας τάσης $\vec{T}'$ του νήματος ($F' = T'$). Η τάση του νήματος λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη κατά την περιστροφή του σφαιριδίου. Συνε-

$$\text{πώς, ισχύει:} \quad F' = T' \quad \text{ή} \quad F' = F_{\kappa} \quad \text{ή} \quad F' = \frac{m\nu^2}{R_2}$$

$$\text{ή} \quad F' = m\omega^2 R_2 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1):}$$

$$F' = 256m\omega_0^2 R_2 \quad \text{ή} \quad F' = 256m\omega_0^2 \frac{R_1}{4}$$

$$\text{ή} \quad F' = 64m\omega_0^2 R_1 \quad (3).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και

$$(3) \quad \text{έχουμε:} \quad \frac{F}{F'} = \frac{1}{64} \quad \text{ή} \quad F' = 64F.$$

16. Α. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Επειδή η στροφορμή του συστήματος των δύο αστροναυτών παραμένει σταθερή, ισχύει:

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή} \quad m\nu_0 \frac{\ell}{2} + m\nu_0 \frac{\ell}{2} = m\nu \frac{\ell}{4} + m\nu \frac{\ell}{4}$$

$$\text{ή} \quad \nu_0 \ell = \nu \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \nu = 2\nu_0 \quad (1).$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η τάση του νήματος που ασκείται σε κάθε αστροναύτη δρα ως κεντρομόλος δύναμη κατά την περιστροφή του. Αρχικά ισχύει:

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T = \frac{2mv_0^2}{\ell} \quad (2).$$

Αν το μέτρο της τάσης του νήματος είναι τελι-

$$\text{κά ίσο με } T', \text{ τότε ισχύει: } T' = \frac{mv^2}{\frac{\ell}{4}}$$

$$\text{ή } T' = \frac{4mv^2}{\ell} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1):}$$

$$T' = \frac{16mv_0^2}{\ell} \quad (3).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και

$$(3) \text{ προκύπτει: } \frac{T}{T'} = \frac{1}{8} \quad \text{ή} \quad T' = 8T.$$

17. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω ω' η νέα γωνιακή ταχύτητα του σφαιριδίου (όταν κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R' = \frac{R}{2}$). Η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή. Επομένως, είναι:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad m\omega R = m\omega' R'$$

$$\text{ή} \quad \omega R^2 = \omega' (R')^2 \quad \text{ή} \quad \omega R^2 = \omega' \frac{R^2}{4}$$

$$\text{ή} \quad \omega' = 4\omega.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$$

$$\text{ή} \quad W_F = \frac{1}{2} m (\omega')^2 - \frac{1}{2} m \omega^2$$

$$\text{ή} \quad W_F = \frac{1}{2} m \left(4\omega \frac{R}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} m (\omega R)^2$$

$$\text{ή} \quad W_F = \frac{3}{2} m \omega^2 R^2.$$

18. α. Είναι: $L_{αρχ} = mv_1 r + mv_1 r$

$$\text{ή } L_{αρχ} = 2m\omega_1 r^2 \text{ ή } L_{αρχ} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

β. Η δύναμη $\vec{T}$ που ασκείται σε κάθε δακτύλιο από το νήμα δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει: $T = \frac{mv_1^2}{r}$ (1), όπου v_1 η γραμμική ταχύτητα του κάθε δακτυλίου. Από τη σχέση (1)

$$\text{έχουμε: } T = \frac{m(\omega_1 r)^2}{r} \text{ ή } T = m\omega_1^2 r$$

$$\text{ή } T = 10 \text{ N}.$$

γ. Έστω ω_2 το μέτρο της τελικής γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι. Επειδή η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – δακτύλιοι ως προς τον άξονα $z'z$ είναι ίση με μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Συνεπώς ισχύει: $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$

$$\text{ή } 2m\omega_1 r^2 = 2m\omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \text{ ή } \omega_2 = 2,5 \text{ rad/s}.$$

δ. Βλέπε: Βασική λυμένη άσκηση 1.

$$\text{Είναι: } \Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ}$$

$$\text{ή } \Delta K = 2 \frac{1}{2} m v_2^2 - 2 \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\text{ή } \Delta K = m \left[\left(\omega_2 \frac{\ell}{2} \right)^2 - (\omega_1 r)^2 \right]$$

$$\text{ή } \Delta K = -3,75 \text{ J}.$$

19. α. Είναι: $v_1 = \omega_1 R_1$ ή $v_1 = 12 \text{ m/s}$.

β. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ είναι ίσο με το μέτρο της τάσης $\vec{T}_1$ του νήματος που ασκείται στο σφαιρίδιο. Επειδή η τάση του νήματος που ασκείται στο σφαιρίδιο δρα ως κεντρομόλος

δύναμη, ισχύει: $F_1 = T_1$ ή $F_1 = F_\kappa$

$$\text{ή } F_1 = \frac{mv_1^2}{R_1} \text{ ή } F_1 = 108 \text{ N}.$$

γ. Επειδή η τάση του νήματος που ασκείται στο σφαιρίδιο δεν δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο K της κυκλικής τροχιάς του, η στροφορμή του σφαιριδίου παραμένει σταθερή. Συνεπώς ισχύει: $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$

$$\text{ή } mv_1 R_1 = mv_2 R_2 \text{ ή } mv_1 R_1 = mv_2 (R_1 - h)$$

$$\text{ή } v_2 = 16 \text{ m/s}.$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$ υπολογίζεται από τη σχέση: $F_2 = T_2$ ή $F_2 = F_\kappa$ ή $F_2 = \frac{mv_2^2}{R_2}$

$$\text{ή } F_2 = 256 \text{ N}.$$

δ. Είναι: $E_{\delta απ} = K_{τελ} - K_{αρχ}$

$$\text{ή } E_{\delta απ} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \text{ ή } E_{\delta απ} = 8,4 \text{ J}.$$

20. α. Η αρχική στροφορμή $\vec{L}_{αρχ}$ του συστήματος των δύο αστροναυτών ως προς τον άξονα περιστροφής τους υπολογίζεται από τη σχέση: $L_{αρχ} = 2mv_1 \frac{\ell}{2}$ ή $L_{αρχ} = 3.200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

β. Έστω $\vec{T}$ η δύναμη που ασκείται σε κάθε αστροναύτη από το σχοινί. Η δύναμη $\vec{T}$ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Συνεπώς, ισχύει:

$$T = F_\kappa \text{ ή } T = m \frac{v_1^2}{\frac{\ell}{2}} \text{ ή } T = 500 \text{ N}.$$

γ. Έστω v_2 το μέτρο της νέας γραμμικής ταχύτητας των αστροναυτών. Η στροφορμή του συστήματος των αστροναυτών διατηρείται

σταθερή, οπότε ισχύει: $L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda}$

$$\text{ή } 2mv_1 \frac{\ell}{2} = 2mv_2 \frac{\ell}{4}$$

$$\text{ή } v_2 = 2v_1 \text{ ή } v_2 = 10 \text{ m/s.}$$

Έστω ω το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής των αστροναυτών. Είναι:

$$v_2 = \omega \frac{\ell}{4} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

δ. Έστω T' το μέτρο της νέας δύναμης που ασκεί το νήμα σε κάθε αστροναύτη. Ισχύει:

$$T' = F_{\kappa} \text{ ή } T' = \frac{mv_2^2}{\ell} \text{ ή } T' = 4.000 \text{ N.}$$

Επομένως, είναι: $\Delta T = T' - T$

$$\text{ή } \Delta T = +3.500 \text{ N.}$$

ε. Η ενέργεια που δαπάνησαν οι αστροναύτες για να μειώσουν τη μεταξύ τους απόσταση στο μισό της αρχικής της τιμής υπολογίζεται από τη σχέση: $E_{\delta\alpha\pi\alpha\nu} = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$

$$\text{ή } E_{\delta\alpha\pi\alpha\nu} = 2\frac{1}{2}mv_2^2 - 2\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{ή } E_{\delta\alpha\pi\alpha\nu} = m(v_2^2 - v_1^2) \text{ ή } E_{\delta\alpha\pi\alpha\nu} = 6.000 \text{ J.}$$

21. α. Επειδή ο δίσκος ισορροπεί, ισχύει:

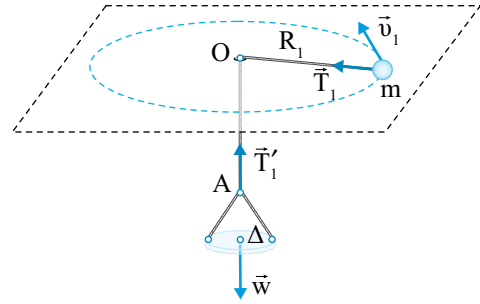
$$\Sigma F = 0 \text{ ή } T'_1 = Mg.$$

$$\text{Είναι: } T_1 = T'_1 \text{ ή } T_1 = Mg.$$

Έστω v_1 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου. Η δύναμη $\vec{T}_1$ που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως, είναι: $T_1 = F_{\kappa}$

$$\text{ή } Mg = \frac{mv_1^2}{R_1} \text{ ή } v_1 = \sqrt{\frac{MgR_1}{m}}$$

$$\text{ή } v_1 = 10 \text{ m/s.}$$



Το μέτρο της αρχικής στροφορμής $\vec{L}_1$ του σφαιριδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_1 = mv_1 R_1 \text{ ή } L_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

β. Η ακτίνα R_2 της νέας κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου είναι ίση με: $R_2 = R_1 - h$ ή $R_2 = 0,5 \text{ m.}$

Έστω v_2 το μέτρο της νέας ταχύτητας του σφαιριδίου. Η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή. Επομένως, ισχύει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \text{ ή } mv_1 R_1 = mv_2 R_2 \text{ ή } v_2 = \frac{v_1 R_1}{R_2}$$

$$\text{ή } v_2 = 20 \text{ m/s.}$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 300\%.$$

δ. Η δύναμη $\vec{T}_2$ που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα δρα ως κεντρομόλος δύναμη:

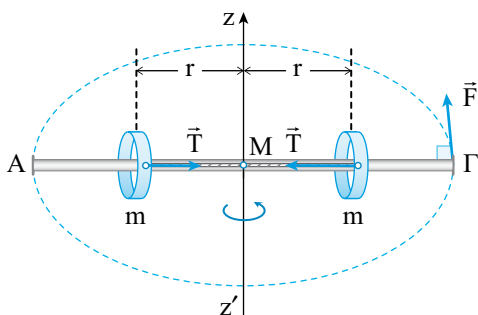
$$T_2 = F_{\kappa} \text{ ή } T_2 = \frac{mv_2^2}{R_2} \text{ ή } T_2 = 160 \text{ N.}$$

Επειδή το σύστημα δίσκος – σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $T'_2 = (M + m_1)g$

$$\text{ή, επειδή } T'_2 = T_2,$$

$$T_2 = (M + m_1)g \text{ ή } m_1 = 14 \text{ kg.}$$

22. α. Έστω $\vec{T}$ η δύναμη που ασκείται σε κάθε δακτύλιο από το νήμα. Η δύναμη $\vec{T}$ λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη για κάθε δακτύλιο.



Έστω v_1 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των δακτυλίων τη χρονική στιγμή t_1 . Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $T_{\theta p} = F_{\kappa}$ ή $T_{\theta p} = \frac{mv_1^2}{r}$ ή $v_1 = 40 \text{ m/s}$.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\bar{\omega}_1$ του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_1 = \omega_1 r$ ή $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$.

β. Έστω L το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο δακτυλίων ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$L = L_1 + L_2 \text{ ή } L = 2mv_1 r \text{ ή } L = 32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

γ. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – δακτύλιοι είναι: τα βάρη των δύο δακτυλίων, η δύναμη από τον άξονα περιστροφής και η δύναμη $\vec{F}$. Από αυτές ροπή ως προς τον άξονα $z'z$ δημιουργεί μόνο η δύ-

ναμη $\vec{F}$. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ είναι σταθερή ως προς τον άξονα $z'z$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι διατηρείται σταθερός. Είναι:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{\epsilon\xi} \text{ ή, αλγεβρικά: } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\epsilon\xi}$$

$$\text{ή } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = F \frac{\ell}{2} \text{ ή } \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = F \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } \frac{L_{\text{συστ}} - 0}{t_1 - 0} = F \frac{\ell}{2} \text{ ή } F = \frac{2L_{\text{συστ}}}{\ell t_1} \quad (1).$$

Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, η στροφορμή του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τη στροφορμή του συστήματος των δύο δακτυλίων. Συνεπώς, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F = \frac{2L}{\ell t_1} \text{ ή } F = 2 \text{ N}.$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της τελικής γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι. Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Συνεπώς, ισχύει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\text{τελ}} \text{ ή } L_{\alpha\rho\chi} = 2mv_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L_{\alpha\rho\chi} = 2m\omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \text{ ή } L_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\omega_2 \ell^2$$

$$\text{ή } \omega_2 = \frac{2L_{\alpha\rho\chi}}{m\ell^2} \text{ ή } \omega_2 = \frac{2L}{m\ell^2} \text{ ή } \omega_2 = 5 \text{ rad/s}.$$

23. α. Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να μεταβάλουμε την ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου από R_1 σε R_2 ισούται με το έργο της δύναμης που ασκούμε στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος.

Είναι: $W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$

ή $W_F = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

ή $W_F = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ (1), όπου v_2 το μέτρο της τελικής γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου. Η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή, οπότε ισχύει: $L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$

ή $mv_1R_1 = mv_2R_2$ ή $v_2 = \frac{R_1}{R_2}v_1$ (2).

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προ-

κύπτει: $W_F = \frac{1}{2}mv_1^2 \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - 1 \right]$

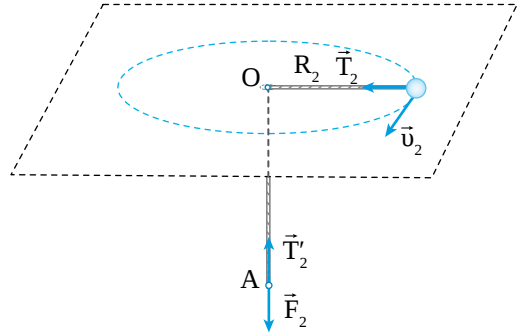
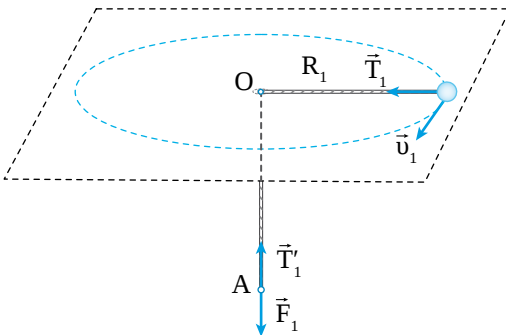
ή $v_1 = 10 \text{ m/s}$.

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $v_2 = 20 \text{ m/s}$.

γ. Επειδή το νήμα είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ ισούται με το μέτρο της δύναμης $\vec{T}_1$ που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα ($F_1 = T_1$). Η δύναμη $\vec{T}_1$ λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη στο σφαιρίδιο. Συνεπώς, ισχύει:

$T_1 = F_k$ ή $T_1 = \frac{mv_1^2}{R_1}$ ή $F_1 = \frac{mv_1^2}{R_1}$

ή $F_1 = 50 \text{ N}$.



δ. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$ είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης $\vec{T}_2$ που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα. Είναι: $T_2 = F_k$ ή $T_2 = \frac{mv_2^2}{R_2}$
 ή $F_2 = \frac{mv_2^2}{R_2}$ ή $F_2 = 400 \text{ N}$.

24. α. Είναι: $L_{\text{αρχ}} = 2mv_1 \frac{\ell}{2}$

ή $L_{\text{αρχ}} = 2.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

β. Είναι: $T_1 = \frac{mv_1^2}{\frac{\ell}{2}}$ ή $T_1 = 375 \text{ N}$.

γ. Η απόσταση μεταξύ των αστροναυτών γίνεται: $\ell' = \ell - \frac{50}{100}\ell$ ή $\ell' = \frac{\ell}{2}$.

Έστω v_2 το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας με την οποία περιστρέφονται οι αστροναύτες. Επειδή η στροφορμή του συστήματος των δύο αστροναυτών διατηρείται σταθερή, ισχύει:

$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$ ή $2mv_1 \frac{\ell}{2} = 2mv_2 \frac{\ell}{4}$ ή $v_2 = 10 \text{ m/s}$.

Το μέτρο ω_2 της νέας γωνιακής ταχύτητας του συστήματος των αστροναυτών υπολογίζεται από τη σχέση: $v_2 = \omega_2 \frac{\ell}{4}$ ή $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$.

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία στροφής των αστροναυτών σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10$ s. Είναι:

$$\Delta\theta = \omega_2 \Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = 50 \text{ rad.}$$

Επομένως, είναι: $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = (25/\pi)$ περιστροφές.

δ. Η ενέργεια που δαπάνησαν οι δύο αστροναύτες για να μειώσουν τη μεταξύ τους απόσταση κατά 50% υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\text{δαπαν}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{δαπαν}} = 2 \frac{1}{2} m v_2^2 - 2 \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{δαπαν}} = m(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{ή} \quad E_{\text{δαπαν}} = 4.500 \text{ J.}$$

ε. Είναι: $T_{\theta p} = F_{\kappa}$ ή $T_{\theta p} = \frac{m v_3^2}{\frac{\ell_{\min}}{2}}$

$$\text{ή} \quad T_{\theta p} = \frac{2 m v_3^2}{\ell_{\min}} \quad (1).$$

Επειδή η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, ισχύει: $L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$

$$\text{ή} \quad 2 m v_1 \frac{\ell}{2} = 2 m v_3 \frac{\ell_{\min}}{2} \quad \text{ή} \quad v_3 = \frac{\ell}{\ell_{\min}} v_1 \quad (2).$$

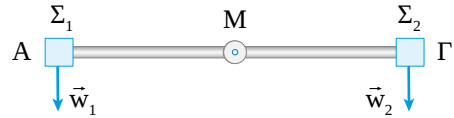
Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), έχου-

$$\text{με:} \quad T_{\theta p} = \frac{2 m \frac{\ell^2}{\ell_{\min}^2} v_1^2}{\ell_{\min}} \quad \text{ή} \quad T_{\theta p} = \frac{2 m \ell^2 v_1^2}{\ell_{\min}^3}$$

$$\text{ή} \quad \ell_{\min} = \sqrt[3]{\frac{2 m \ell^2 v_1^2}{T_{\theta p}}} \quad \text{ή} \quad \ell_{\min} = 2 \text{ m.}$$

25. α. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι: τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

Η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής $x'x$ της ράβδου.



Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί υπολογίζεται από τη σχέση:

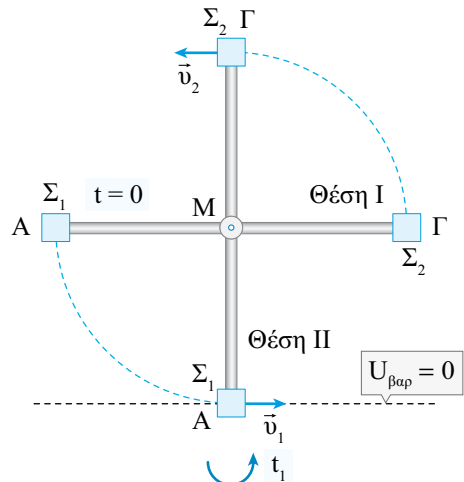
$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\epsilon\zeta}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = w_1 \frac{\ell}{2} - w_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = m_1 g \frac{\ell}{2} - m_2 g \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα τη χρονική στιγμή t_1 . Τα μέτρα v_1 και v_2 των γραμμικών ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 δίνονται από τις σχέσεις: $v_1 = \omega_1 \frac{\ell}{2}$ (1) και $v_2 = \omega_2 \frac{\ell}{2}$ (2).



Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση του συστήματος από την αρχική του θέση (Θέση I) στην τελική του θέση (Θέση II), θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_1 , έχουμε: $E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}}$

$$\text{ή } K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\begin{aligned} \text{ή } 0 + m_1 g \frac{\ell}{2} + m_2 g \frac{\ell}{2} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g \ell \\ \text{ή } \frac{1}{2} m_1 g \ell + \frac{1}{2} m_2 g \ell &= \frac{1}{2} m_1 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 g \ell \end{aligned}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 g \ell - \frac{1}{2} m_2 g \ell = \frac{1}{8} m_1 \omega_1^2 \ell^2 + \frac{1}{8} m_2 \omega_1^2 \ell^2$$

$$\text{ή } \omega_1 = \sqrt{\frac{4(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)\ell}} \quad \text{ή } \omega_1 = 2 \text{ rad/s.}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

γ. Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (3), όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ οι στροφορμές των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 .

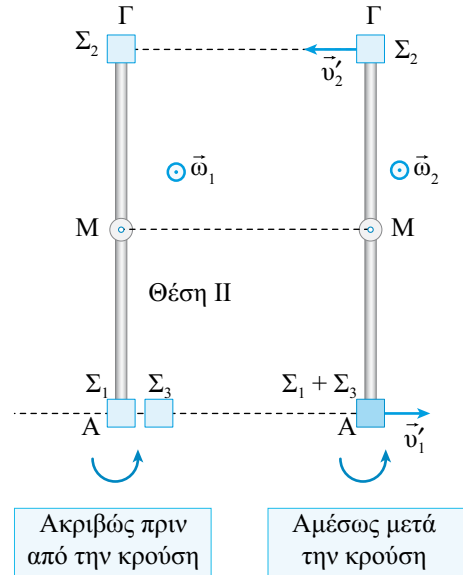
Επειδή οι στροφορμές $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, η σχέση (3) γράφεται:

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{ή} \quad L = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L = m_1 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega_1 \ell^2 \quad \text{ή} \quad L = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα αμέσως μετά την πλαστική κρούση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_3 .



Θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από το σώμα Σ_3 και το ενιαίο σώμα που δημιουργούν η ράβδος μαζί με τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 . Η στροφορμή του συστήματος αυτού διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης. Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, δεν έχει στροφορμή. Επομένως, είναι: $\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}}$

$$\text{ή } \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega_1 \ell^2 = (m_1 + m_3) v_1' \frac{\ell}{2} + m_2 v_2' \frac{\ell}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ή } \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega_1 \ell^2 &= (m_1 + m_3) \omega_2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \\ &+ m_2 \omega_2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ή } \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega_1 \ell^2 = \frac{1}{4} (m_1 + m_2 + m_3) \omega_2 \ell^2$$

$$\text{ή } \omega_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \omega_1 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 1,25 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\bar{v}'_2$ του σημειακού σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $v'_2 = \omega_2 \frac{\ell}{2}$

$$\text{ή } v'_2 = 1,25 \text{ m/s.}$$

ε. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_3) v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right]}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{(m_1 + m_3) \left(\omega_2 \frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \left(\omega_2 \frac{\ell}{2} \right)^2}{m_1 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \omega_2^2}{(m_1 + m_2) \omega_1^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 37,5\%.$$

$$26. \alpha. \text{ Είναι: } \omega_0 = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \omega_0 = \frac{\Delta \theta}{t_1}$$

$$\text{ή } \omega_0 = 10 \text{ rad/s.}$$

β. Η στροφορμή $\bar{L}_{\text{αρχ}}$ του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση: $\bar{L}_{\text{αρχ}} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2$ (1), όπου $\bar{L}_1$ και $\bar{L}_2$ οι στροφορμές των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση. Τα διανύσματα $\bar{L}_1$ και $\bar{L}_2$ έχουν φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, οπότε η σχέση (1) γράφεται: $L_{\text{αρχ}} = L_1 + L_2$

$$\text{ή } L_{\text{αρχ}} = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L_{\text{αρχ}} = m_1 \omega_0 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \omega_0 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L_{\text{αρχ}} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \omega_0 \ell^2$$

$$\text{ή } L_{\text{αρχ}} = 120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

γ. Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_3 αμέσως μετά την κρούση. Η στροφορμή του συστήματος του σημειακού σώματος Σ_3 και του ενιαίου σώματος που δημιουργούν η ράβδος και τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης ως προς τον άξονα z/z' . Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, δεν έχει στροφορμή. Συνεπώς, ισχύει:

$$\bar{L}_{\text{αρχ}} = \bar{L}_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad L_{\text{αρχ}} = L_3 \quad \text{ή} \quad L_{\text{αρχ}} = m_3 v_3 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } v_3 = 20 \text{ m/s.}$$

δ. Τα μέτρα των ταχυτήτων $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις: $v_1 = \omega_0 \frac{\ell}{2}$ ή $v_1 = 20 \text{ m/s}$ και $v_2 = \omega_0 \frac{\ell}{2}$ ή $v_2 = 20 \text{ m/s.}$

$$\text{Είναι: } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = 600 \text{ J} \quad \text{και} \quad K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 600 \text{ J.}$$

Επειδή ισχύει $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$, η κρούση είναι ελαστική.

ε. Το σημειακό σώμα Σ_3 μετά την κρούση εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα $d = \frac{\ell}{2}$. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σημειακού σώμα-

τος Σ_3 μετά την κρούση. Ισχύει:

$$v_3 = \omega \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του σημειακού σώματος Σ_3 από τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία συγκρούεται με το σώμα Σ_2 , είναι $\Delta\theta' = \pi \text{ rad}$. Έχουμε:

$$\Delta\theta' = \omega \Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\theta' = \omega(t_2 - t_1)$$

$$\text{ή} \quad t_2 = \frac{\Delta\theta'}{\omega} + t_1 \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,15\pi \text{ s.}$$

27. α. Είναι: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$

ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = (100/\pi) \text{ rad/s}^2$.

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$.

Τα μέτρα v_1 και v_2 των ταχυτήτων των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις: $v_1 = \omega_1 \frac{\ell}{2}$ ή $v_1 = 5 \text{ m/s}$ και $v_2 = \omega_1 \frac{\ell}{2}$ ή $v_2 = 5 \text{ m/s}$.

Η στροφορμή $\vec{L}_{\pi\rho\nu}$ του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση: $\vec{L}_{\pi\rho\nu} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1), όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ είναι οι στροφορμές των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα $z'z$ ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή οι στροφορμές $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν την ίδια φορά (από τη σελίδα προς τον αναγνώστη), η σχέση (1) γράφεται: $L_{\pi\rho\nu} = L_1 + L_2$

$$\text{ή} \quad L_{\pi\rho\nu} = mv_1 \frac{\ell}{2} + mv_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή} \quad L_{\pi\rho\nu} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

γ. Η ράβδος είναι αβαρής, οπότε δεν έχει στροφορμή ως προς τον άξονα $z'z$. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου ΑΓ και των υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ είναι σταθερός και δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} \quad \text{ή, αλγεβρικά:}$$

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = \tau_F$$

$$\text{ή} \quad \frac{L_{\pi\rho\nu} - 0}{t_1} = F \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad F = \frac{2L_{\pi\rho\nu}}{\ell t_1}$$

$$\text{ή} \quad F = \frac{100}{\pi} \text{ N.}$$

δ. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.

Ισχύει: $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 + \vec{L}'_3$

$$\text{ή} \quad mv_1 \frac{\ell}{2} + mv_2 \frac{\ell}{2} = mv'_1 \frac{\ell}{2} + mv'_2 \frac{\ell}{2} + m'v'_3 \frac{\ell}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad m\omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ = m\omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m'\omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad 2m\omega_1 = (2m + m')\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 5 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι: $v'_2 = \omega_2 \frac{\ell}{2}$

$$\text{ή} \quad v'_2 = 2,5 \text{ m/s.}$$

ε. Είναι: $E_{\text{απωλ}} = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}$

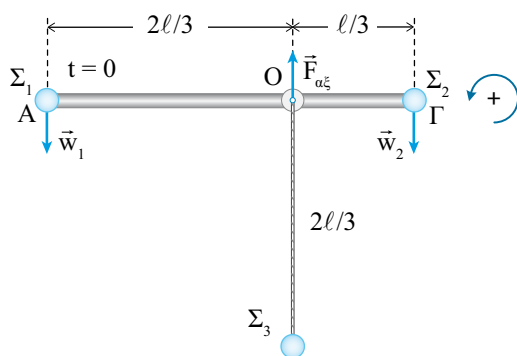
$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \left(\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}m'v^2 \right)$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2}m\left(\omega_1 \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m'\left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 \right]$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{4}m\omega_1^2\ell^2 - \frac{1}{8}(2m+m')\omega_2^2\ell^2$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = 12,5 \text{ J.}$$

28. α. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα της ράβδου ΑΓ και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι: τα βάρη $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής, η οποία δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής $x'x$.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί, ισχύει:

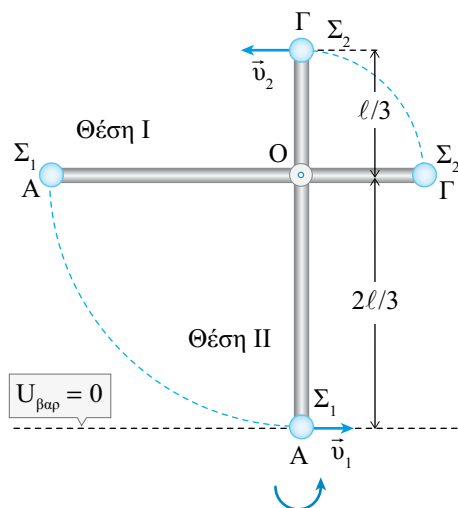
$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{\epsilon\zeta} \text{ ή, αλγεβρικά:}$$

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2}$$

$$\text{ή } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = m_1 g \frac{2\ell}{3} - m_2 g \frac{\ell}{3}$$

$$\text{ή } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

β. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 μεταξύ των θέσεων (I) και (II) που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου ΑΓ, όταν αυτή βρίσκεται στη θέση (II).



$$\text{Είναι: } E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}}$$

$$\text{ή } K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή } 0 + m_1 g \frac{2\ell}{3} + m_2 g \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_2 g \ell \quad (1),$$

όπου v_1 και v_2 τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα στη

θέση (II). Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος στη θέση II. Είναι:

$$v_1 = \omega_1 \frac{2\ell}{3} \quad (2) \text{ και } v_2 = \omega_1 \frac{\ell}{3} \quad (3).$$

Η σχέση (1), λόγω των σχέσεων (2) και (3) γράφεται:

$$m_1 g \frac{2\ell}{3} + m_2 g \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 \frac{4\ell^2}{9} + \frac{1}{2} m_2 \omega_1^2 \frac{\ell^2}{9} + m_2 g \ell$$

$$\text{ή } \left[\frac{1}{3} (2m_1 - m_2) \right] g = \frac{1}{18} (4m_1 + m_2) \omega_1^2 \ell$$

$$\text{ή } \omega_1 = 2 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Από τη σχέση (1) προκύπτει: } v_1 = \frac{20}{3} \text{ m/s.}$$

γ. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $v_2 = \frac{10}{3} \text{ m/s.}$

Η στροφορμή $\vec{L}_{\text{πριν}}$ του συστήματος των σημειακών σημείων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \text{ ή, αλγεβρικά:}$$

$$L_{\text{πριν}} = L_1 + L_2 \text{ ή } L_{\text{πριν}} = m_1 v_1 \frac{2\ell}{3} + m_2 v_2 \frac{\ell}{3}$$

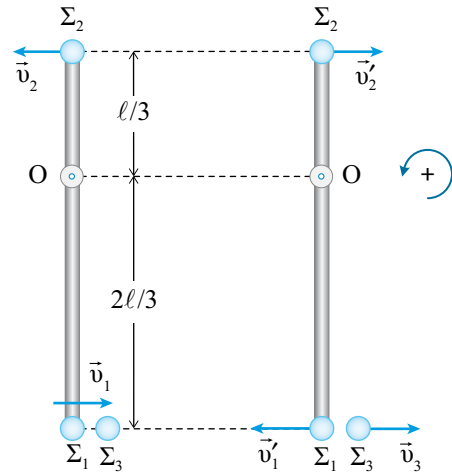
$$\text{ή } L_{\text{πριν}} = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

δ. Έστω v'_1 και v'_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_1 = \omega_2 \frac{2\ell}{3}$

$$\text{ή } v'_1 = \frac{20}{3} \text{ m/s και } v'_2 = \omega_2 \frac{\ell}{3}$$

$$\text{ή } v'_2 = \frac{10}{3} \text{ m/s.}$$

Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_3 αμέσως μετά την κρούση.



Ακριβώς πριν
από την κρούση

Αμέσως μετά
την κρούση

Η στροφορμή του συστήματος που αποτελείται από το σημειακό σώμα Σ_3 και το ενιαίο σώμα που δημιουργούν η ράβδος ΑΓ μαζί με τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, δεν έχει στροφορμή, οπότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}} \text{ ή, αλγεβρικά: } L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετά}}$$

$$\text{ή } L_{\text{πριν}} = -m_1 v'_1 \frac{2\ell}{3} - m_2 v'_2 \frac{\ell}{3} + m_3 v_3 \frac{2\ell}{3}$$

$$\text{ή } v_3 = 10 \text{ m/s.}$$

ε. Έστω $\Delta \vec{L}_{1,2}$ η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ κατά την κρούση. Είναι: $\Delta \vec{L}_{1,2} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$ ή, αλγεβρικά:

$$\Delta L_{1,2} = -m_1 v'_1 \frac{2\ell}{3} - m_2 v'_2 \frac{\ell}{3} - \left(m_1 v_1 \frac{2\ell}{3} - m_2 v_2 \frac{\ell}{3} \right)$$

$$\text{ή } \Delta L_{1,2} = -100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

Έστω $\Delta \vec{L}_3$ η μεταβολή της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_3 ως προς τον άξονα $x'x$ κατά την κρούση. Είναι: $\Delta \vec{L}_3 = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$

ή, αλγεβρικά: $\Delta L_3 = m_3 v_3 \frac{2\ell}{3} - 0$

ή $\Delta L_3 = +100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Θέματα Επανάληψης

Κρούσεις

1. α. Έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $-5 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot 10$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$.

β. Έχουμε: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ (1) ή $v_2' = 5 \text{ m/s}$.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2} \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad s_2 = 6,25 \text{ m}.$$

γ. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(A)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g \ell \quad \text{ή} \quad \ell = 1,25.$$

δ. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \quad \text{ή} \quad v_0 = 5\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

$$\text{Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει: } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 100\%.$$

ε. Με βάση τη μεθοδολογία που γνωρίζουμε, το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi' = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

2. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu_1 m_1 g d + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = 8 \text{ m/s}.$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_w + W_N \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = -\mu_2 (m_1 + m_2) g s + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε: $\bar{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v_2 = 1 \text{ m/s}.$

Το ζητούμενο ποσό θερμότητας είναι: $Q_K = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } Q_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad \text{ή } Q_K = 27 \text{ J.}$$

γ. Ισχύει: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})}$ ή $\Delta p_2 = m_2v - m_2(-v_2)$ ή $\Delta p_2 = m_2(v + v_2)$ ή $\Delta p_2 = +6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

$$\text{ή } |\Delta p_2| = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

δ. Ισχύει: $\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv'$ ή $\frac{dK}{dt} = -T v'$ ή $\frac{dK}{dt} = -\mu_2(m_1 + m_2)gv'$ ή $\frac{dK}{dt} = -\mu_2 g p$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -3 \text{ J/s.}$$

3. α. Έχουμε: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$ ή $v'_1 = -2 \text{ m/s}$ και $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$ ή $v'_2 = +8 \text{ m/s}$.

β. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_1 μεταξύ του σώματος Σ_1 και του οριζόντιου δαπέδου υπολογίζεται από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση που εκτελεί το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

Έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1}$ ή $0 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = -\mu_1 m_1 g s_1 + 0 + 0$ ή $\mu_1 = 0,1$.

γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_3 . Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση με το σώμα Σ_1 έως τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση με το

σώμα Σ_3 , έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2} + W_{w_2} + W_{N_2}$ ή $\frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -\mu_2 m_2 g d + 0 + 0$

$$\text{ή } v = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_3 έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$ ή $m_2v = (m_2 + m_3)v_\Sigma$ ή $v_\Sigma = 3 \text{ m/s}$.

δ. Έστω α_1 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 . Έχουμε: $\Sigma F_x = m_1\alpha_1$ ή $T_1 = m_1\alpha_1$ ή $\mu_1 m_1 g = m_1\alpha_1$ ή $\alpha_1 = 1 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_1 μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 . Έχουμε: $0 = |v'_1| - \alpha_1 t_1$ ή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Έστω α_2 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση του με το σώμα Σ_1 και πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_3 . Έχουμε: $\Sigma F_x = m_2\alpha_2$ ή $T_2 = m_2\alpha_2$ ή $\mu_2 m_2 g = m_2\alpha_2$ ή $\alpha_2 = 3 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 συγκρούεται με το σώμα Σ_3 . Έχουμε:

$$v = v'_2 - \alpha_2 t_2 \quad \text{ή } t_2 = \frac{4}{3} \text{ s.}$$

Έστω t_3 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_3 . Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει: $t_3 = t_1 = 2$ s.

Έστω α_Σ το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

Έχουμε: $0 = v_\Sigma - \alpha_\Sigma (t_3 - t_2)$ ή $\alpha_\Sigma = 4,5 \text{ m/s}^2$.

Το διάστημα s_2 που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί υπολογίζεται από τη σχέση: $s_2 = v_\Sigma (t_3 - t_2) - \frac{1}{2} \alpha_\Sigma (t_3 - t_2)^2$ ή $s_2 = 1 \text{ m}$.

ε. Έχουμε: $Q_{ολ} = E_{αρχ} - E_{τελ}$ ή $Q_{ολ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0$ ή $Q_{ολ} = 100 \text{ J}$.

4. α. Επειδή το δάπεδο είναι λείο, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία συγκρούονται τα σώματα Σ_1 και Σ_2 οι ταχύτητες τους είναι $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ αντίστοιχα. Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -4 \text{ m/s}$$

$$\text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +6 \text{ m/s}.$$

β. Έχουμε: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$ ή $\Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1$ ή $\Delta p_1 = -24 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

και $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})}$ ή $\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2$ ή $\Delta p_2 = +24 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

γ. Έχουμε: $W_{F_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ή $W_{F_1} = -48 \text{ J}$.

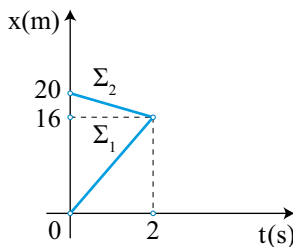
δ. Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 εκτελούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις πριν από την κρούση, οι εξισώσεις κίνησης τους είναι αντίστοιχα: $x_1 = x_{01} + v_1 t$ ή $x_1 = 8t$ (S.I.) (1)

και $x_2 = x_{02} + v_2 t$ ή $x_2 = 20 - 2t$ (S.I.) (2).

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία τα δύο σώματα συγκρούονται, ισχύει: $x_1 = x_2$,

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2): $t_1 = 2$ s.

Οι γραφικές παραστάσεις της θέσης κάθε σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s, φαίνονται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος:



5. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος (από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία στη θέση όπου το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο), θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}(M+m)v^2 + 0 = 0 + (M+m)g\ell$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{2g\ell} \quad \text{ή} \quad v = 4 \text{ m/s.}$$

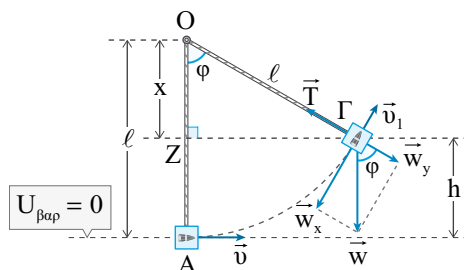
Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \quad \text{ή} \quad m v_0 = (M+m)v \quad \text{ή} \quad v_0 = 40 \text{ m/s.}$$

$$\text{β. Έχουμε: } \pi = \frac{K_{ολ(\pi\rho\iota\nu)} - K_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{ολ(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 90\%.$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση όπου το νήμα σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με την αρχική κατακόρυφη θέση του. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ ($\hat{Z} = 90^\circ$) που σχηματίζεται, προκύπτει:

$$\text{συν}\phi = \frac{x}{\ell} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\phi = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \text{ή} \quad h = \ell(1 - \text{συν}\phi) \quad \text{ή} \quad h = 0,4 \text{ m.}$$



Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Γ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}(M+m)v^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)v_1^2 + (M+m)gh \quad \text{ή} \quad v_1 = 2\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της στροφορμής του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 ως προς τον άξονα $x'x$ υπολογίζεται από τη σχέση: $L = (M+m)v_1\ell$ ή $L = 3,2\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$

δ. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t_1 , στην ακτινική διεύθυνση, δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Συνεπώς, ισχύει: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = \frac{(M+m)v_1^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T - w_y = \frac{(M+m)v_1^2}{\ell} \quad \text{ή} \quad T = (M+m)g\text{συν}\phi + \frac{(M+m)v_1^2}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad T = 30 \text{ N.}$$

ε. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F|$ ή $\frac{dp}{dt} = \sqrt{F_k^2 + w_x^2}$.

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{\left[\frac{(M+m)v_1^2}{\ell} \right]^2 + [(M+m)g\eta\mu\varphi]^2} \quad \text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 10\sqrt{7}\text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1

ως προς τον άξονα $x'x$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau|$ ή $\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\tau_{w_x}|$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right| = (M+m)g\eta\mu\varphi\ell \quad \text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right| = 8\sqrt{3}\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

6. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)}$ ή $\frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1gR = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0$ ή $v_1 = 8 \text{ m/s}$.

β. Στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, ισχύει: $\Sigma F_{\text{ακτ}} = F_k$ ή $T + w_2 = \frac{m_2v^2}{\ell}$ ή $T = \frac{m_2v^2}{\ell} - m_2g$ (1).

Για να εκτελέσει ανακύκλωση το σώμα Σ_2 , πρέπει στο σημείο Δ να ισχύει: $T \geq 0$

$$\text{ή } \frac{m_2v^2}{\ell} - m_2g \geq 0 \quad \text{ή } v \geq \sqrt{g\ell}.$$

Επειδή το σώμα Σ_2 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, το μέτρο της ταχύτητάς του στο σημείο Δ είναι: $v_\Delta = \sqrt{g\ell} = \sqrt{7,2} \text{ m/s}$.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Γ στη θέση Δ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$ ή $\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2v_\Delta^2 + m_2g2\ell$ ή $v_2' = 6 \text{ m/s}$.

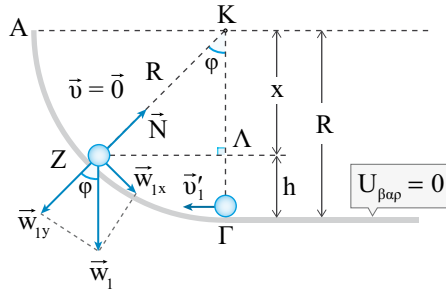
γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\pi = \frac{E_{\text{μετ}}}{E_{\mu\eta\chi(A)}} \cdot 100\%$ ή $\pi = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1gR}$ (1).

$$\text{Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad \text{ή } 6 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}8 \quad \text{ή } \frac{m_1}{m_2} = 0,6 \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $\pi = 93,75\%$.

δ. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$, ή, λόγω της σχέσης (2): $v_1' = -2 \text{ m/s}$.

Έστω h το ύψος πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ , στο οποίο ακινητοποιείται στιγμιαία το σώμα Σ_1 μετά την κρούση (θέση Z). Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Z), θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ , έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(Z)}$ ή $\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = m_1 gh$. ή $h = 0,2 \text{ m}$.



Όπως φαίνεται από το σχήμα ισχύει: $\sin\varphi = \frac{x}{R}$ ή $\sin\varphi = \frac{R-h}{R}$ ή $\sin\varphi = \frac{5}{7}$.

Έχουμε: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = 0$ ή $N - w_{1y} = 0$ ή $N = w_1 \sin\varphi$ ή $N = m_1 g \sin\varphi$ ή $N = 50 \text{ N}$.

7. α. Έστω v_2' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa} \text{ ή } T - m_2 g = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \text{ ή } v_2' = 6 \text{ m/s.}$$

Έστω v_1' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση που εκτελεί το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{w_1} + W_{N_1}$
ή $0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g s_1 + 0 + 0$ ή $v_1' = 6 \text{ m/s}$.

β. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$
ή $m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2'$ ή $v_1 = 12 \text{ m/s}$.

$$\text{Ισχύει: } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \text{ ή } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = 72 \text{ J και } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \text{ ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 72 \text{ J.}$$

Επειδή ισχύει: $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$, η κρούση είναι ελαστική.

γ. Έστω ότι το σώμα Σ_2 φτάνει μετά την κρούση στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει με ταχύτητα μέτρου v . Από την Α.Δ.Μ.Ε για τις θέσεις Γ και Δ , θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ , έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$ ή $\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + m_2 2g\ell$ ή $v = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Το μέτρο T' της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_{\text{ακτ}} = F_{\kappa}$ ή $T' + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell}$ ή $T' = 30 \text{ N}$.

Επειδή είναι $T > 0$, το σώμα Σ_2 εκτελεί ανακύκλωση.

δ. Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t στην οποία το νήμα γίνεται για πρώτη φορά οριζόντιο μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση Γ στη θέση Z όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά μετά την κρούση, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(Z)}$ ή $\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_3^2 + m_2 g \ell$ ή $v_3 = \sqrt{24} \text{ m/s}$ ή $v_3 = 4,9 \text{ m/s}$.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t

υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt} = -m_2 g \frac{ds}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt} = -m_2 g v_3$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -147 \text{ J/s.}$$

ε. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_1} + W_{w_1} + W_{N_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad v_0 = \sqrt{180} \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_0 = 13,41 \text{ m/s.}$$

Έστω a_1 το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 πριν και μετά την κρούση. Ισχύει: $\Sigma F_x = m_1 a_1$ ή $T_1 = m_1 a_1$ ή $\mu m_1 g = m_1 a_1$ ή $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία συγκρούονται τα δύο σώματα. Ισχύει: $v_1 = v_0 - a_1 t_1$

$$\text{ή } t_1 = 1,41 \text{ s.}$$

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Έχουμε:

$$0 = v_1' - a_1 (t_2 - t_1) \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = 6 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = 7,41 \text{ s.}$$

8. α. Έστω v_2' η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη θέση A στη θέση Δ , θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση A , έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$

$$\text{ή } K_A + U_A = K_{\Delta} + U_{\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = 0 + m_2 g h \quad \text{ή} \quad v_2' = 10 \text{ m/s.}$$

$$\text{Έχουμε: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad m_1 = 1 \text{ kg.}$$

β. Έστω v_1' η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή } v_1' = -10 \text{ m/s.}$$

$$\text{Το ζητούμενο ποσοστό είναι: } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 25\%.$$

γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται ανερχόμενο από το σημείο Γ του τεταρτοκυκλίου. Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g R \quad \text{ή} \quad v = 6 \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{N}$ που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το τεταρτοκύκλιο τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από το σημείο Γ υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa}$ ή $N = \frac{m_2 v^2}{R}$
ή $N = 33,75 \text{ N}$.

δ. Η ζητούμενη μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ_2 δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή αλγεβρικά:} \quad \Delta L = L_{\tau\epsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi} \quad (1).$$

Τα διανύσματα $\vec{L}_{\tau\epsilon\lambda}$ και $\vec{L}_{\alpha\rho\chi}$ είναι κάθετα στη σελίδα με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, η σχέση (1) γίνεται: $\Delta L = m_2 v R - m_2 v_2' R$ ή $\Delta L = -38,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Επομένως, το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_2 είναι $|\Delta L| = 38,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, ενώ το διάνυσμά της είναι κάθετο στη σελίδα με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

ε. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ_2 από τη θέση Γ στη θέση Δ η μοναδική δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι το βάρος του $\vec{w}_2$. Συνεπώς, ισχύει: $\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F|$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = m_2 g$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

9. α. Έχουμε: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v_1' = -2 \text{ m/s}$

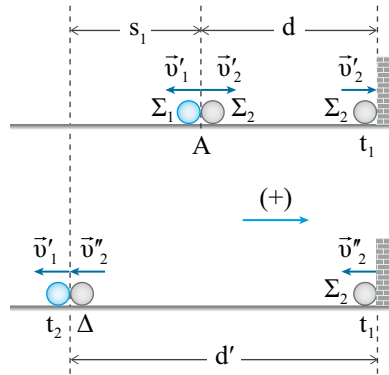
$$\text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

β. Επειδή η κρούση της σφαίρας Σ_2 με τον τοίχο είναι ελαστική, η σφαίρα Σ_2 ανακλάται από τον τοίχο με ταχύτητα $\vec{v}_2'' = -\vec{v}_2'$. Συνεπώς ισχύει ότι: $|v_2''| = |v_2'|$ ή $|v_2''| = 4 \text{ m/s}$.

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης με τον τοίχο υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda(2)} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi(2)}$ ή $\Delta p_2 = -m_2 |v_2''| - m_2 |v_2'|$ ή $\Delta p_2 = -2m_2 |v_2'|$ ή $\Delta p_2 = -16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
ή $|\Delta p_2| = 16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

γ. Αφού $|v_2''| > |v_1'|$ η σφαίρα Σ_2 θα συγκρουστεί ξανά με τη σφαίρα Σ_1 . Τη t_1 χρονική στιγμή στην οποία η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται με τον τοίχο ισχύει: $|v_2'| = \frac{d}{t_1}$ ή $t_1 = 0,5 \text{ s}$.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_2 η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται ξανά με τη σφαίρα Σ_1 , στη θέση Δ που απέχει απόσταση d' από τον τοίχο.



Έστω s_1 το διάστημα που διανύει η σφαίρα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 . Όπως φαίνεται από το σχήμα ισχύει: $d' = s_1 + d$ ή $|v_2''|(t_2 - t_1) = |v_1'|t_2 + |v_2|t_1$ ή $t_2 = 2 \text{ s}$.

δ. Για να παραμένει η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών συνεχώς σταθερή μετά τη κρούση της σφαίρας Σ_2 με τον τοίχο, πρέπει να ισχύει: $|v_2''| = |v_1'|$ ή $|v_2'| = |v_1'|$ ή $v_2' = -v_1'$

$$\text{ή } \frac{2m_1'}{m_1' + m_2'} v_1 = -\frac{m_1' - m_2'}{m_1' + m_2'} v_1 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1'}{m_2'} = \frac{1}{3}.$$

10. α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_{T_1} + W_{N_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g \mu \phi s_1 - \mu_1 m_1 g \sin \phi s_1 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = 3 \text{ m/s}.$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$v = \frac{s_2}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v = 1 \text{ m/s}.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

ή, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$: $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$

$$\text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = 2.$$

γ. Το ύψος h του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από τη σχέση: $\eta \mu \phi = \frac{h}{s_1 + s_2}$

$$\text{ή } h = 2 \text{ m}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{Q_{\kappa}}{U_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{m_1gh} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 30\%.$$

δ. Έστω μ_2 ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του συσσωματώματος και του κεκλιμένου επιπέδου. Έχουμε: $\Sigma F_x = 0$ ή $w_x = T$ ή $(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = \mu_2(m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\phi$ ή $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Το πηλίκο $\frac{Q_1}{Q_2}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{|W_{T_1}|}{|W_T|}$ ή $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_1 m_1 g \sigma\upsilon\nu\phi_{S_1}}{\mu_2 (m_1 + m_2) g \sigma\upsilon\nu\phi_{S_2}}$

$$\text{ή } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3}{11}.$$

11. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που ταυτίζεται με τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε: $E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gh$

ή $|v_1| = 10 \text{ m/s}$. Συνεπώς, είναι: $p_1 = m_1|v_1|$ ή $p_1 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

β. Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ (1).

Επειδή μετά την κρούση παραμένει στο σώμα Σ_1 το 25% της κινητικής ενέργειας που είχε ακριβώς πριν από την κρούση, ισχύει: $K_{1(\text{μετά})} = \frac{25}{100} K_{1(\text{πριν})}$ ή $\frac{1}{2}m_1v_1'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2$ ή $|v'_1| = \frac{1}{2}|v_1|$ ή $|v'_1| = 5 \text{ m/s}$.

Συνεπώς από τη σχέση (1) προκύπτει: $-5 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 10$ ή $m_2 = 6 \text{ kg}$. $p - p$

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(\text{μετά})} - \vec{p}_{1(\text{πριν})}$ ή $\Delta p_1 = m_1v'_1 - m_1v_1$ ή $\Delta p_1 = -30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ή $|\Delta p_1| = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται σταθερή κατά την κρούση ισχύει: $\Delta p_{\text{ολ}} = 0$ ή $\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ ή $\Delta p_2 = -\Delta p_1$ ή $|\Delta p_2| = |\Delta p_1|$ ή $|\Delta p_2| = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

δ. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση αρχίζει να κινείται προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου επιβραδυνόμενο με επιβράδυνση μέτρου α_2 και αφού ακινητοποιηθεί στιγμιαία, αρχίζει να κινείται προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου επιταχυνόμενο με επιτάχυνση ίδιου μέτρου. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, προκύπτει: $\Sigma F_x = m_2\alpha_2$ ή $w_{2x} = m_2\alpha_2$ ή $m_2g\eta\mu\phi = m_2\alpha_2$ ή $\alpha_2 = 5 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 διέρχεται ξανά από το σημείο όπου έγινε η κρούση. Η μετατόπιση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή ισχύει: $\Delta x_2 = |v'_2|t_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_1^2$ ή $0 = |v'_2|t_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_1^2$

$$\text{ή } t_1 \left(|v'_2| - \frac{1}{2}\alpha_2 t_1 \right) = 0 \quad (2).$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει: $t_1 = 0$ (άτοπο) ή $|v'_2| - \frac{1}{2}\alpha_2 t_1 = 0$ ή $t_1 = \frac{2|v'_2|}{\alpha_2}$

$$\text{ή } t_1 = \frac{2 \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} |v_1|}{\alpha_2} \quad \text{ή } t_1 = 2 \text{ s.}$$

12. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $mv_0 = (M + m)v$ ή $v = 3 \text{ m/s}$.

Έστω s το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_T + W_N \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}(M + m)v^2 = -(M + m)gh_{μψ} - \mu(M + m)gs_{υνψ} + 0$$

ή $s = 0,6 \text{ m}$.

β. Ισχύει: $\Delta \vec{p}_{βλ.} = \vec{p}_{βλ.(μετά)} - \vec{p}_{βλ.(πριν)}$ ή $\Delta p_{βλ.} = mv - mv_0$ ή $\Delta p_{βλ.} = -29,7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

ή $|\Delta p_{βλ.}| = 29,7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

γ. Έχουμε: $Q_{ολ} = Q_{κρούσης} + Q_T$ ή $Q_{ολ} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)v^2 + 2\mu(M + m)gs_{υνψ}$

ή $Q_{ολ} = 4.485 \text{ J}$.

δ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται ξανά από το σημείο Α. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται ξανά από το σημείο Α έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_T + W_N$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(M + m)v_1^2 - 0 = (M + m)gh_{μψ} - \mu(M + m)gs_{υνψ} + 0 \quad \text{ή } v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται ξανά από το σημείο Α, υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma F v_1$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = [(M + m)gh_{μψ} - \mu(M + m)gs_{υνψ}]v_1 \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = 25\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -w_x \frac{dx}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -(M+m)g\eta\mu\varphi_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -50\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

13. Βλέπε Βασική λυμένη άσκηση 8.

$$\text{α. } v_1' = -4 \text{ m/s, } v_2' = +2 \text{ m/s.}$$

$$\text{β. } E_{\text{μετ}} = \Delta K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = 10 \text{ J.}$$

$$\text{γ. } \Delta \ell_{\text{max}} = 0,4 \text{ m.}$$

$$\text{δ. } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

14. Βλέπε τη λύση της άσκησης 197, στο κεφάλαιο των **Κρούσεων**.

$$\text{α. } v = 2 \text{ m/s.}$$

$$\text{β. } Q_{\text{ολ}} = 980 \text{ J.}$$

$$\text{γ. } t_1 = 2 \text{ s.}$$

$$\text{δ. } d = 2 \text{ m.}$$

15. α. Επειδή η κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι ελαστική, ισχύει:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -2 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v το μέτρο της κοινής ταχύτητας που αποκτούν τα σώματα Σ_2 και Σ_3 τη χρονική στιγμή στην οποία το ελατήριο αποκτά τη μέγιστη συσπείρωση του $\Delta \ell_{\text{max}}$. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\alpha\rho\chi)} = \vec{p}_{\text{ολ}(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2' = (m_2 + m_3) v \quad \text{ή} \quad v = 1 \text{ m/s.}$

γ. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 , Σ_3 και του ελατηρίου έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(\alpha\rho\chi)} = E_{\text{μηχ}(\tau\epsilon\lambda)} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\epsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\epsilon\lambda(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2 + \frac{1}{2} k \Delta \ell_{\text{max}}^2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_{\text{max}} = 0,4 \text{ m.}$$

δ. Έστω v_2'' και v_3 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το ελατήριο. Από την Α.Δ.Ο. και την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 , Σ_3 και του ελατηρίου από τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 προσκρούει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το ελατήριο, προκύπτει:

$$v_2'' = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_2' \quad \text{ή} \quad v_2'' = -2 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |v_2''| = 2 \text{ m/s.}$$

$$\text{και} \quad v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2' \quad \text{ή} \quad v_3 = 2 \text{ m/s.}$$

16. α. Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση του με το συσσωμάτωμα. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_w + W_N \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad v_2' = 2 \text{ m/s}.$$

β. Έστω v_1 και v'_1 οι ταχύτητες του συσσωματώματος ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση με το σώμα Σ_2 αντίστοιχα. Έχουμε: $v'_1 = \frac{(m_1 + m) - m_2}{m_1 + m + m_2} v_1$ και $v'_2 = \frac{2(m_1 + m)}{m_1 + m + m_2} v_1$ (2).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει: $v'_1 = -v'_2$ ή $\frac{(m_1 + m) - m_2}{m_1 + m + m_2} v_1 = -\frac{2(m_1 + m)}{m_1 + m + m_2} v_1$
ή $m_2 = 3 \text{ kg}$.

γ. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $v_1 = 4 \text{ m/s}$. Έστω μ' ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του συσσωματώματος και του οριζόντιου δαπέδου. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος πριν από την κρούση με το σώμα Σ_2 έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_w + W_N$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m)v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m)v_0'^2 = -\mu'(m_1 + m)gd + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad \mu' = 0,5.$$

δ. Έστω a_2 το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση του με το συσσωμάτωμα. Έχουμε: $\Sigma F_x = m_2 a_2$ ή $T_2 = m_2 a_2$ ή $\mu m_2 g = m_2 a_2$ ή $a_2 = 1 \text{ m/s}^2$.

Έστω Δt το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του με το συσσωμάτωμα μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται. Ισχύει: $0 = v_2' - a_2 \Delta t$ ή $\Delta t = 2 \text{ s}$.

Έστω α το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m)\alpha \quad \text{ή} \quad T = (m_1 + m)\alpha \quad \text{ή} \quad \mu'(m_1 + m)g = (m_1 + m)\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

Το χρονικό διάστημα κίνησης $\Delta t'$ του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται υπολογίζεται από τη σχέση: $0 = |v_1'| - \alpha \Delta t'$ ή $\Delta t' = 0,4 \text{ s}$.

Το διάστημα s' που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί υπολογίζεται από τη σχέση: $s' = |v_1'| \Delta t' - \frac{1}{2} \alpha' (\Delta t')^2$ ή $s' = 0,4 \text{ m}$.

Αφού $\Delta t > \Delta t'$, τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το συσσωμάτωμα το σώμα Σ_2 δεν έχει ακόμη ακινητοποιηθεί.

Το διάστημα s_2 που διανύει το σώμα Σ_2 στο χρονικό διάστημα $\Delta t'$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s_2 = |v_2'| \Delta t' - \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t')^2 \quad \text{ή} \quad s_2 = 0,72 \text{ m}.$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ του σώματος Σ_2 και του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται το συσσωμάτωμα, είναι: $d = s_2 + s'$ ή $d = 1,12 \text{ m}$.

ε. Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση του βλήματος με το σώμα Σ_1 , έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)x} = \vec{P}_{ολ(μετά)x} \quad \text{ή} \quad m v_{0x} = (m_1 + m) v'_0 \quad \text{ή} \quad m v_0 \sin \varphi = (m_1 + m) v'_0 \quad \text{ή} \quad v_0 = 120 \text{ m/s.}$$

Το συνολικό ποσό θερμότητας προκύπτει: $Q_{ολ} = E_{ολ(αρχ)} - E_{ολ(τελ.)}$

$$\text{ή} \quad Q_{ολ} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ή} \quad Q_{ολ} = 720 \text{ J.}$$

17. α. $v = 3 \text{ m/s.}$

β. $v_2 = 2 \text{ m/s.}$

γ. $\pi = 70\%.$

δ. $|\Delta p_2| = \sqrt{63} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$

ε. $\vec{F} = 600\sqrt{3} \text{ N.}$

18. α. $\varphi = 90^\circ.$

β. $v_1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s, } v_2 = \frac{2}{3} \text{ m/s.}$

γ. $\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{l(πριν)}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 25\%.$

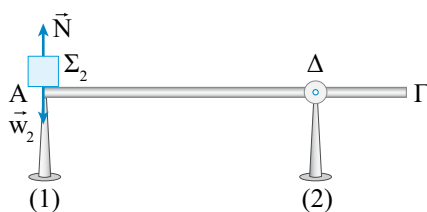
δ. Έχουμε: $|\Delta \vec{p}_2| = m_2 v_2 \quad \text{ή} \quad |\Delta \vec{p}_2| = \frac{2}{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$

Επειδή η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή κατά την κρούση, ισχύει:

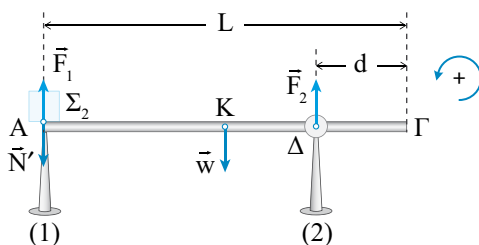
$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{ή} \quad |\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2| \quad \text{ή} \quad |\Delta \vec{p}_1| = \frac{2}{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

Μηχανική στερεού σώματος

19. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $N = w_2$ ή $N = m_2 g$ ή $N = 30 \text{ N}$.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν από την κρούση είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα και η δύναμη $\vec{N}'$ από το σώμα Σ_2 . Ισχύει: $N' = N$.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

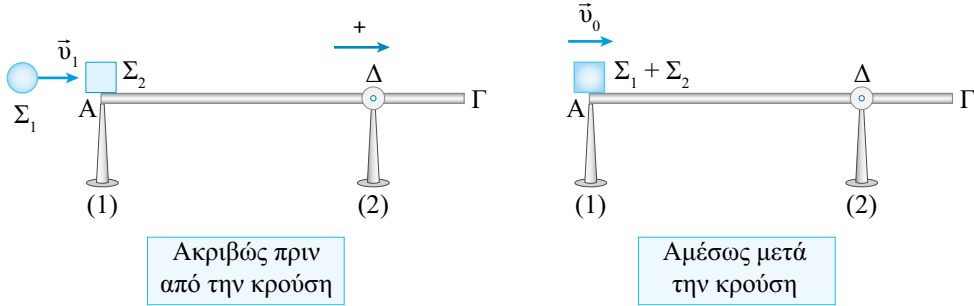
$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F_1} + \tau_{N'} + \tau_w + \tau_{F_2} = 0 \quad \text{ή} \quad -F_1(L-d) + N'(L-d) + w\left(\frac{L}{2} - d\right) + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_1(L-d) = N(L-d) + Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) \quad \text{ή} \quad F_1 = \frac{110}{3} \text{ N}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $F_1 + F_2 - N' - w = 0$

$$\text{ή} \quad F_2 = N + Mg - F_1 \quad \text{ή} \quad F_2 = \frac{40}{3} \text{ N}.$$

β. Έστω $\vec{v}_0$ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



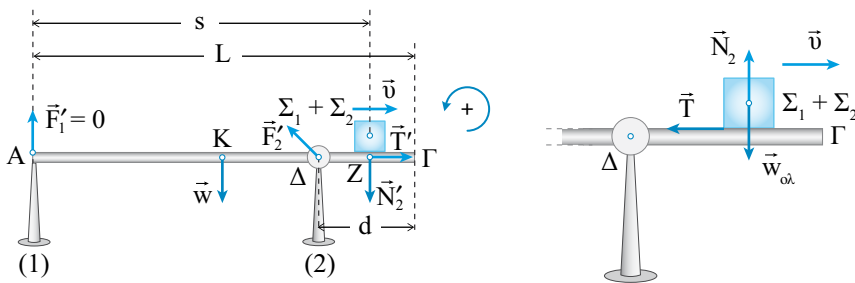
Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_0 \quad \text{ή} \quad v_0 = 6 \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{Q_K}{K_{I(πριν)}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_0^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

γ. Η ράβδος θα χάσει την επαφή της με το υποστήριγμα (1) αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα θα βρεθεί στο σημείο Z της ράβδου που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Έστω s το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Στα ακόλουθα σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t_1 .



Τη χρονική στιγμή t_1 ασκούνται στο συσσωμάτωμα από τη ράβδο η δύναμη $\vec{N}_2$ που είναι κάθετη στη ράβδο και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ που αντιστέκεται στην κίνηση του συσσωματώματος.

Ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $N_2 - w_{ολ} = 0$ ή $N_2 = (m_1 + m_2)g$ ή $N_2 = 40 \text{ N}$ και

$T = \mu N_2$ ή $T = 20 \text{ N}$.

Στη ράβδο τη χρονική στιγμή t_1 ασκούνται το βάρος της $\vec{w}$, οι δυνάμεις $\vec{F}'_1$ και $\vec{F}'_2$ από τα υποστηρίγματα (1) και (2) αντίστοιχα και οι δυνάμεις $\vec{N}'_2$ και $\vec{T}'$ από το συσσωμάτωμα, οι οποίες είναι οι αντιδράσεις των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{T}$. Συνεπώς, για τα μέτρα τους ισχύει: $N'_2 = N_2$ και $T' = T$.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η ράβδος ανατρέπεται, ισχύει: $\vec{F}' = \vec{0}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η ράβδος ισορροπεί οριακά, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{F'_1} + \tau_w + \tau_{F'_2} + \tau_{N'_2} + \tau_{T'} = 0 \quad \text{ή} \quad 0 + w \left(\frac{L}{2} - d \right) + 0 - N'_2 [s - (L - d)] + 0 = 0$$

$$\text{ή} \quad N_2 [s - (L - d)] = Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) \quad \text{ή} \quad N_2 s - N_2 (L - d) = Mg \left(\frac{L}{2} - d \right)$$

$$\text{ή} \quad s = \frac{Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) + N_2 (L - d)}{N_2} \quad \text{ή} \quad s = 3,5 \text{ m.}$$

Έστω a το μέτρο της επιβράδυνσης του συσσωματώματος. Ισχύει: $\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a$

ή $T = (m_1 + m_2)a$ ή $a = 5 \text{ m/s}^2$. Επειδή το συσσωμάτωμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, ισχύει: $s = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a (t_1 - 0)^2$ ή $2,5 t_1^2 - 6 t_1 + 3,5 = 0$ (S.I.) (1). Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι: $t_1 = 1,4 \text{ s}$ ή $t_1 = 1 \text{ s}$.

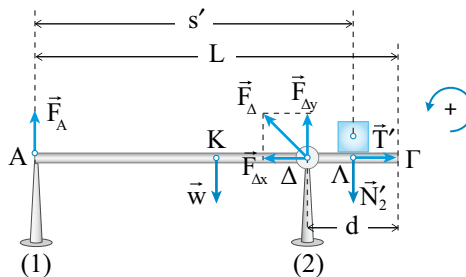
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας v του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_0 - at \quad \text{ή} \quad v = 6 - 5t \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $t = t_1 = 1,4 \text{ s}$ προκύπτει: $v = -1 \text{ m/s}$ (άτοπο), ενώ από την ίδια σχέση για $t = t_1 = 1 \text{ s}$ προκύπτει: $v = 1 \text{ m/s}$. Συνεπώς, δεκτή λύση είναι η $t_1 = 1 \text{ s}$.

δ. Έστω s' το διάστημα που έχει διανύσει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8 t_1$. Είναι: $s' = v_0 t_2 - \frac{1}{2} a (t_2 - 0)^2$ ή $s' = 3,2 \text{ m}$.

Το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στο σημείο Λ της ράβδου που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0$ ή $\tau_{F_A} + \tau_w + \tau_{F_A} + \tau_{N_2'} + \tau_{T'} = 0$

$$\text{ή } -F_A(L-d) + w\left(\frac{L}{2} - d\right) + 0 - N_2'[s' - (L-d)] + 0 = 0$$

$$\text{ή } F_A(L-d) = Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - N_2[s' - (L-d)] \quad \text{ή } F_A = 4 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (3) και $\Sigma F_y = 0$ (4).

Από τη σχέση (3) προκύπτει: $T' - F_{\Delta x} = 0$ ή $F_{\Delta x} = T$ ή $F_{\Delta x} = 20 \text{ N}$.

Από τη σχέση (4) προκύπτει: $F_{\Delta y} + F_A - w - N_2' = 0$ ή $F_{\Delta y} = Mg + N_2 - F_A$ ή $F_{\Delta y} = 56 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το υποστήριγμα (2) τη χρονική στιγμή t_2

$$\text{υπολογίζεται από τη σχέση: } F_{\Delta} = \sqrt{F_{\Delta x}^2 + F_{\Delta y}^2} \quad \text{ή } F_{\Delta} = \sqrt{3.152} \text{ N.}$$

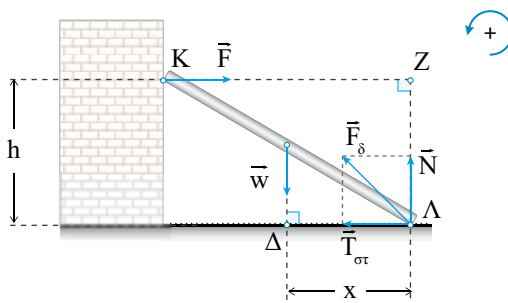
ε. Έστω v' η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$v' = v_0 - at_2 \quad \text{ή } v' = 2 \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 προ-

$$\text{κύπτει: } \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -T v' \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -40 \text{ J/s.}$$

20. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(\Lambda)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_w + \tau_{F_s} = 0$ ή $-F(\Lambda Z) + w(\Lambda \Delta) + 0 = 0$

$$\text{ή } -Fh + wx = 0 \quad \text{ή } FL\eta\mu\phi = w\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi \quad \text{ή } F = 15\sqrt{3} \text{ N.}$$

β. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (2) προκύπτει: $N - w = 0$ ή $N = w$ ή $N = 30 \text{ N}$.

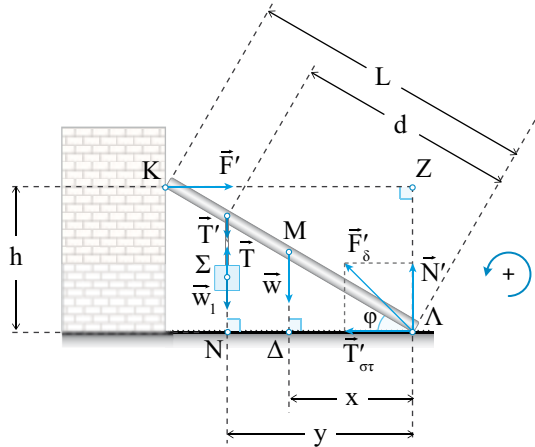
Από τη σχέση (1) προκύπτει: $F - T_{\sigma\tau} = 0$ ή $T_{\sigma\tau} = F$ ή $T_{\sigma\tau} = 15\sqrt{3} \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο δάπεδο υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } F_{\delta} = \sqrt{N^2 + T_{\sigma\tau}^2} \quad \text{ή } F_{\delta} = \sqrt{1.575} \text{ N.}$$

γ. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\vec{\Sigma \vec{F}} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T = w_1$ ή $T = 10 \text{ N}$.

Είναι: $T' = T$ ή $T' = 10 \text{ N}$.



Έστω d η μέγιστη απόσταση από το άκρο Λ της ράβδου όπου μπορούμε να αναρτήσουμε το σώμα Σ , ώστε η ράβδος να μην ολισθήσει. Στην περίπτωση αυτήν, για το μέτρο της στατικής τριβής $T'_{\sigma\tau}$ που ασκείται στη ράβδο από το δάπεδο ισχύει: $T'_{\sigma\tau} = T_{op}$ ή $T'_{\sigma\tau} = \mu_s N'$ (3).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει: $\vec{\Sigma \vec{F}} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (4) και $\Sigma F_y = 0$ (5).

Από τη σχέση (5) έχουμε: $N' - w - T' = 0$ ή $N' = T' + w$ ή $N' = 40 \text{ N}$.

Συνεπώς, από τη σχέση (3) προκύπτει: $T'_{\sigma\tau} = 20\sqrt{3} \text{ N}$.

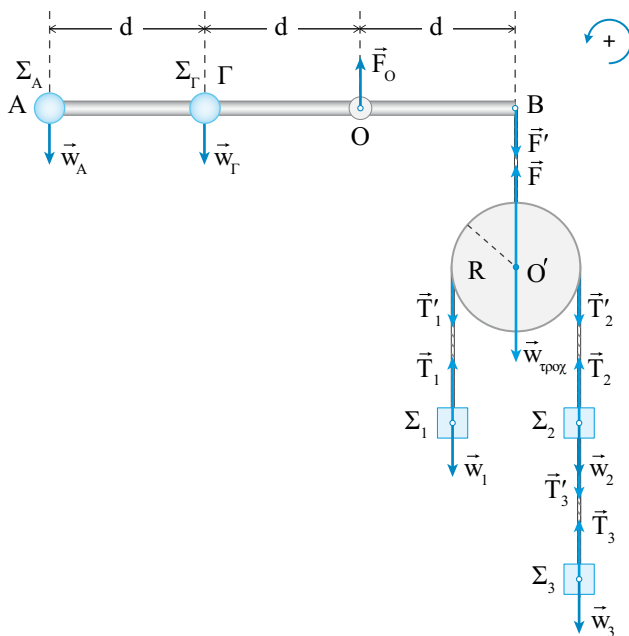
Από τη σχέση (4) προκύπτει: $\Sigma F_x = 0$ ή $F' = T'_{\sigma\tau}$ ή $F' = 20\sqrt{3} \text{ N}$.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει: $\Sigma \tau_{(\Lambda)} = 0$ ή $\tau_{F'} + \tau_{T'} + \tau_w + \tau_{F'_g} = 0$

ή $-F'(\Lambda Z) + T'(\Lambda N) + w(\Lambda \Delta) + 0 = 0$ ή $T'y + wx = F'h$ ή $T'd \sin \varphi + w \frac{L}{2} \sin \varphi = F'L \eta \mu \varphi$

ή $d = 2 \text{ m}$.

21. Έστω ότι το σύστημα της τροχαλίας και των σημειακών σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 ισορροπεί ακίνητο.



Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_1 - w_1 = 0$

ή $T_1 = m_1 g$ ή $T_1 = 20 \text{ N}$.

Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_3 - w_3 = 0$

ή $T_3 = m_3 g$ ή $T_3 = 10 \text{ N}$.

Είναι: $T'_3 = T_3$ ή $T'_3 = 10 \text{ N}$.

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_2 - w_2 - T'_3 = 0$

ή $T_2 = m_2 g + T'_3$ ή $T_2 = 20 \text{ N}$.

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O')} = 0$ ή $\tau_{T'_1} + \tau_{T'_2} + \tau_F + \tau_{w_{\text{τροχ}}} = 0$

ή $T'_1 R - T'_2 R + 0 + 0 = 0$ ή $T'_1 R = T'_2 R$ ή $T'_1 = T'_2$ ή $T_1 = T_2$, που ισχύει.

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $F - w_{\text{τροχ}} - T'_1 - T'_2 = 0$

ή $F = M g + T'_1 + T'_2$ ή $F = M g + T_1 + T_2$ ή $F = 80 \text{ N}$.

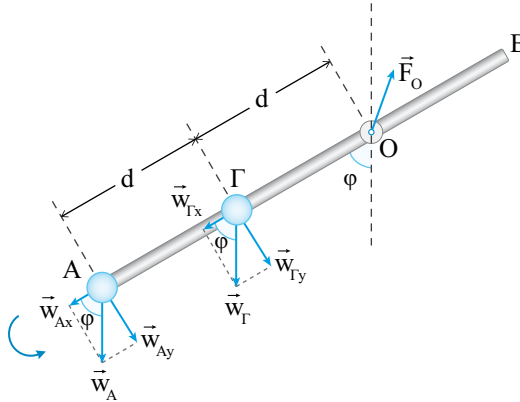
Είναι: $F' = F$ ή $F' = 80 \text{ N}$.

Έστω ότι η ράβδος ισορροπεί στην οριζόντια θέση. Είναι: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{w_A} + \tau_{w_G} + \tau_{F_O} + \tau_{F'} = 0$

ή $w_A 2d + w_G d + 0 - F' d = 0$ ή $2m_A g + m_G g = F'$ ή $m_G = \frac{F'}{g} - 2m_A$ ή $m_G = 6 \text{ kg}$, που ισχύει.

Επομένως, **όλο το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο στην οριζόντια θέση.**

β. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_A και Σ_Γ τη χρονική στιγμή στην οποία η ράβδος σχηματίζει για πρώτη φορά οξεία γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την κατακόρυφο.



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_A και Σ_Γ ως προς τον άξονα $x'x$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{w_A} + \vec{\tau}_{w_\Gamma} + \vec{\tau}_{F_O}$

ή, αλγεβρικά: $\frac{dL}{dt} = \tau_{w_A} + \tau_{w_\Gamma} + \tau_{F_O}$

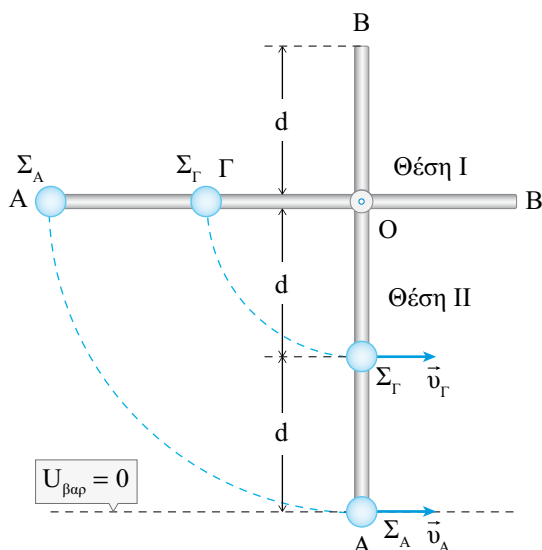
ή, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη:

$$\frac{dL}{dt} = w_{Ay} 2d + w_{\Gamma y} d + 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = 2m_A g \eta \mu \varphi d + m_\Gamma g \eta \mu \varphi d \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = +40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{dL}{dt} \right| = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

γ. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_A και Σ_Γ ακριβώς πριν από την κρούση. Η γραμμική ταχύτητα του σημειακού σώματος Σ_A ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v_A = \omega 2d$ (1).

Η γραμμική ταχύτητα του σημειακού σώματος Σ_Γ ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v_\Gamma = \omega d$ (2).



Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης (Θέση I) και της τελικής θέσης (Θέσης II) του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_A και Σ_Γ , θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Α, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\text{αρχ})} = E_{\mu\eta\chi(\text{τελ})} \quad \text{ή} \quad K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή} \quad 0 + m_A g 2d + m_\Gamma g 2d = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_\Gamma v_\Gamma^2 + 0 + m_\Gamma g d$$

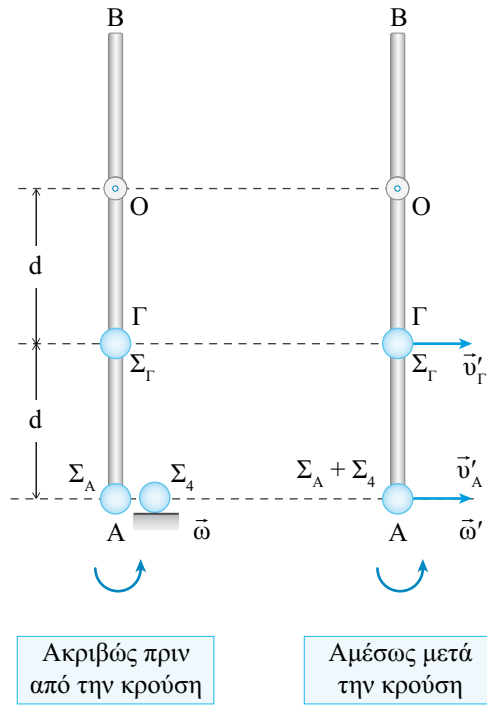
$$\text{ή} \quad 4m_A g d + 2m_\Gamma g d = m_A v_A^2 + m_\Gamma v_\Gamma^2 \quad \text{ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):}$$

$$(4m_A + 2m_\Gamma) g d = 4m_A \omega^2 d^2 + m_\Gamma \omega^2 d^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{(4m_A + 2m_\Gamma) g}{(4m_A + m_\Gamma) d}} \quad \text{ή} \quad \omega = 4 \text{ rad/s.}$$

Η στροφορμή του συστήματος που αποτελείται από το σημειακό σώμα Σ_A και το ενιαίο σώμα που δημιουργούν η ράβδος ΑΒ μαζί με τα σημειακά σώματα Σ_A και Σ_Γ διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_A , Σ_Γ και Σ_A αμέσως μετά την κρούση. Η γραμμική ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v'_A = \omega' 2d$ (3).

Η γραμμική ταχύτητα του σημειακού σώματος Σ_Γ αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v'_\Gamma = \omega' d$ (4).

Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, δεν έχει στροφορμή.



Από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad m_A v_A 2d + m_\Gamma v_\Gamma d = (m_A + m_4) v'_A 2d + m_\Gamma v'_\Gamma d$$

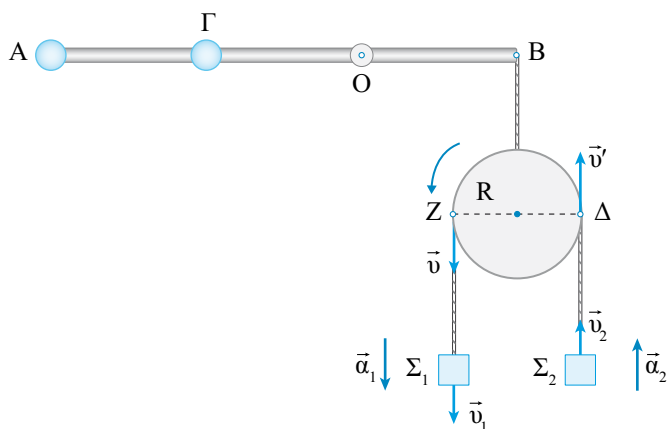
ή, λόγω των σχέσεων (1), (2), (3) και (4): $m_A \omega (2d)^2 + m_\Gamma \omega d^2 = (m_A + m_4) \omega' (2d)^2 + m_\Gamma \omega' d^2$

$$\text{ή} \quad (4m_A + m_\Gamma) \omega = [4(m_A + m_4) + m_\Gamma] \omega' \quad \text{ή} \quad \omega' = \frac{(4m_A + m_\Gamma) \omega}{4(m_A + m_4) + m_\Gamma}$$

$$\text{ή} \quad \omega' = \frac{4}{3} \text{ rad/s.}$$

Επομένως, από τη σχέση (3) για $\omega' = \frac{4}{3} \text{ rad/s}$, προκύπτει: $v'_A = \frac{8}{3} \text{ m/s}$.

δ. Έστω α_1 και α_2 τα μέτρα των επιταχύνσεων με τις οποίες κινούνται τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 .



Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία τα σημειακά σώματα Σ₁ και Σ₂ έχουν ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντίστοιχα. Επειδή το νήμα που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι της τροχαλίας είναι αβαρές και μη εκτατό, ισχύει: $\vec{v}_1 = \vec{v}_Z$ ή $v_1 = v$ (5) και $\vec{v}_2 = \vec{v}'$ ή $v_2 = v'$ (6).

Έστω ω_τ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας την τυχαία χρονική στιγμή t .

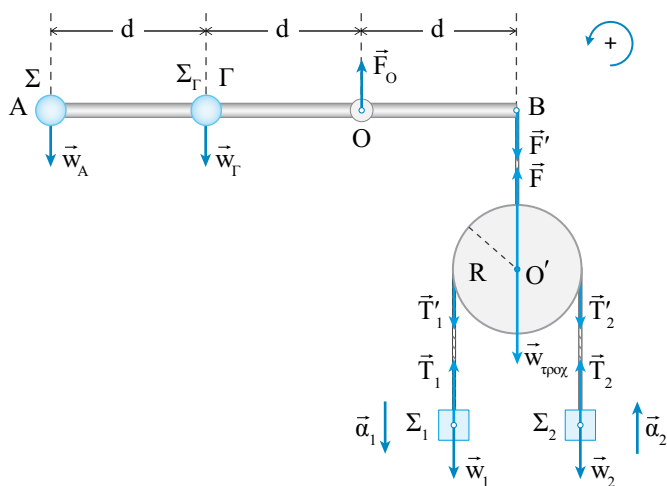
Από τη σχέση (5) έχουμε: $v_1 = \omega_\tau R$ ή παραγωγίζοντας: $\frac{dv_1}{dt} = \frac{d\omega_\tau}{dt} R$

ή $\alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_1 = 2 \text{ m/s}^2$.

Από τη σχέση (6) έχουμε: $v_2 = \omega_\tau R$ ή παραγωγίζοντας: $\frac{dv_2}{dt} = \frac{d\omega_\tau}{dt} R$

ή $\alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ ή $\alpha_2 = 2 \text{ m/s}^2$.

ε. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα κατά τη διάρκεια της περιστροφής της τροχαλίας.



Είναι: $T_2 = T'_2$ ή $T_2 = 120 \text{ N}$.

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_w + \tau_N + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{T_2} = 0$

ή $0 + 0 + T_{\sigma\tau}R - T_2R = 0$ ή $T_{\sigma\tau} = T_2$ ή $T_{\sigma\tau} = 120 \text{ N}$.

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (1)

και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $w_{K(x)} - T_2 - T_{\sigma\tau} = 0$ ή $mg\eta\mu\phi = T_2 + T_{\sigma\tau}$ ή $m = 30 \text{ kg}$.

β. Επειδή τα ενιαία σώμα Σ , ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (3)

και $\Sigma F_y = 0$ (4).

Από τη σχέση (3) προκύπτει: $F_x - T_1 = 0$ ή $F_x = 60 \text{ N}$.

Από τη σχέση (4) προκύπτει: $\Sigma F_y = 0$ ή $F_y - w_{\Delta} - w = 0$ ή $F_y = w_{\Delta} + w$

ή $F_y = m_{\Delta}g + Mg$ ή $F_y = 120 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο ενιαίο σώμα από τον άξονα περιστροφής του δίνεται

από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 10\sqrt{180} \text{ N}$.

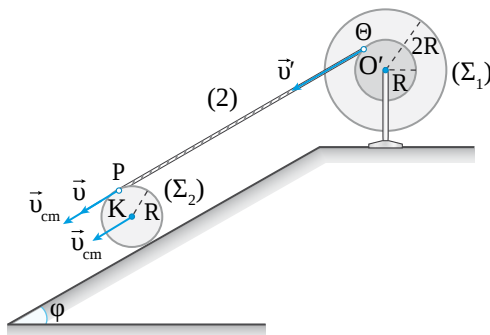
γ. Έστω v_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $s = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2$ ή $t_1 = \sqrt{\frac{2s}{\alpha_{cm}}}$ ή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται

από τη σχέση: $v_{cm} = \alpha_{cm}t_1$ ή $v_{cm} = 2 \text{ m/s}$.

δ. Έστω ω_{τ} το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 .



Επειδή το νήμα (2) είναι αβαρές και μη εκτατό, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$\vec{v}_P = \vec{v}_{\Theta}$ ή $\vec{v}_{cm} + \vec{v} = \vec{v}'$ ή $v' = 2v_{cm}$ ή $\omega_{\tau}R = 2v_{cm}$ ή $\omega_{\tau} = 20 \text{ rad/s}$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Είναι: $\omega_{\tau} = \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)}t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)} = 10 \text{ rad/s}^2$.

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής της τροχαλίας από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)} t_1^2$ ή $\Delta\theta_1 = 20 \text{ rad}$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου. Είναι: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2$.

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2$ ή $\Delta\theta_2 = 10 \text{ rad}$.

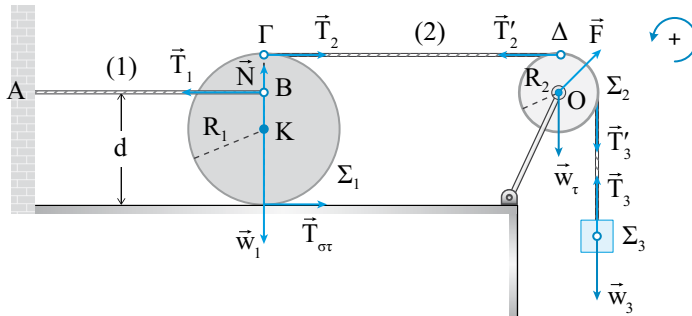
Ο ζητούμενος λόγος υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}}{\frac{\Delta\theta_2}{2\pi}}$ ή $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}$ ή $\frac{N_1}{N_2} = 2$.

ε. Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από την περιφέρεια του δίσκου ακτίνας R της διπλής τροχαλίας στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\ell_1 = R\Delta\theta_1$ ή $\ell_1 = 4 \text{ m}$.

Το μήκος του νήματος που τυλίγεται στην περιφέρεια του κυλίνδρου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\ell_2 = R\Delta\theta_2$
ή $\ell_2 = 2 \text{ m}$.

Το συνολικό μήκος του νήματος (2) που ξετυλίγεται είναι: $\ell = \ell_1 - \ell_2$ ή $\ell = 2 \text{ m}$.

23. α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.



Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$

$$T_3 - w_3 = 0 \quad \text{ή} \quad T_3 = M_3 g \quad \text{ή} \quad T_3 = 10 \text{ N}.$$

Είναι: $T'_3 = T_3$ ή $T'_3 = 10 \text{ N}$.

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_{w_\tau} + \tau_{T'_3} + \tau_{T'_2} = 0$

$$\text{ή} \quad 0 + 0 - T'_3 R_2 + T'_2 R_2 = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 = T'_3 \quad \text{ή} \quad T'_2 = 10 \text{ N}.$$

Είναι: $T_2 = T'_2$ ή $T_2 = 10 \text{ N}$.

Επειδή ο δίσκος Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_{T_1} + \tau_{T_2} + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_{w_1} + \tau_N = 0$

$$\text{ή } T_1(d - R_1) - T_2 R_1 + T_{\sigma\tau} R_1 + 0 + 0 = 0 \text{ ή } \frac{1}{2} T_1 R_1 = T_2 R_1 - T_{\sigma\tau} R_1 \text{ ή } T_1 = 2T_2 - 2T_{\sigma\tau} \quad (1).$$

Επειδή ο δίσκος Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (2) και $\Sigma F_y = 0$.

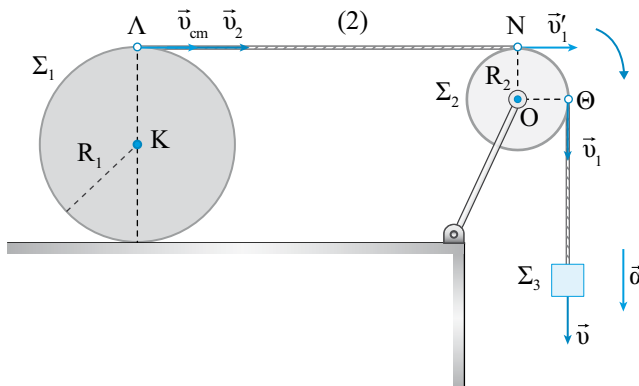
Από τη σχέση (2) προκύπτει: $T_1 - T_2 - T_{\sigma\tau} = 0$ ή $T_1 = T_2 + T_{\sigma\tau}$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει: $2T_2 - 2T_{\sigma\tau} = T_2 + T_{\sigma\tau}$ ή $T_{\sigma\tau} = \frac{T_2}{3}$ ή $T_{\sigma\tau} = \frac{10}{3} \text{ N}$.

Από τη σχέση (3) για $T_{\sigma\tau} = \frac{10}{3} \text{ N}$, προκύπτει: $T_1 = \frac{40}{3} \text{ N}$.

β. Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία η ταχύτητα του σώματος Σ_3 είναι $\vec{v}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου Σ_1 είναι $\vec{v}_{cm}$.

Έστω ότι η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(\tau)}$ και ότι τη χρονική στιγμή t η γωνιακή της ταχύτητα είναι $\vec{\omega}_t$.



Επειδή το νήμα (2) είναι αβαρές και μη εκτατό, ισχύει: $\vec{v} = \vec{v}_\Theta$ ή $\vec{v} = \vec{v}_1$ ή $v = \omega_t R_2$

$$\text{ή παραγωγίζοντας: } \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega_t}{dt} R_2 \text{ ή } a = \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)} R_2 \quad (4).$$

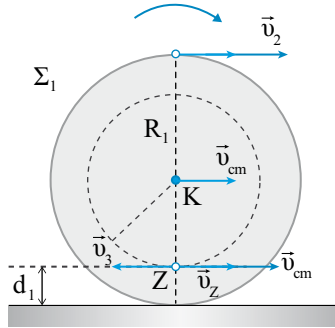
Επειδή το νήμα (2) είναι αβαρές και μη εκτατό, ισχύει ακόμη: $\vec{v}_\Lambda = \vec{v}_N$ ή $\vec{v}_{cm} + \vec{v}_2 = \vec{v}'_1$

$$\text{ή } v_{cm} + v_2 = v'_1 \text{ ή } 2v_{cm} = \omega_t R_2 \text{ ή παραγωγίζοντας: } 2 \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega_t}{dt} R_2 \text{ ή } 2a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau)} R_2 \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει: $2a_{cm} = a$ ή $a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2$.

γ. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{cm} = a_{cm} t_1$ ή $v_{cm} = 1 \text{ m/s}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Z έχει ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου Σ_1 και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}_3$ λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου Σ_1 . Η ταχύτητα του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\vec{v}_Z = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_3$ (6).



Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $v_{cm} = \omega R_1$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Η απόσταση του σημείου Z από το κέντρο K του δίσκου είναι: $r = R_1 - d_1$ ή $r = \frac{R_1}{2}$
ή $r_1 = 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_3 = \omega r$ ή $v_3 = 0,5 \text{ m/s}$.

Επειδή τα διανύσματα $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}_3$ έχουν αντίθετη φορά, η σχέση (6) γράφεται:

$$v_Z = v_{cm} - v_3 \quad \text{ή} \quad v_Z = 0,5 \text{ m/s}.$$

δ. Έστω h η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος Σ_3 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο της τροχιάς στο οποίο βρίσκεται το σώμα Σ_3 τη χρονική στιγμή t_2 , τότε για τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ_3 ισχύει: $\Delta U = U_{t_2} - U_{t_1}$ ή $\Delta U = 0 - M_3 gh$ ή $\Delta U = -M_3 gh$ ή $h = 4 \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } h = \frac{1}{2} a t_2^2 \quad \text{ή} \quad t_2 = 2 \text{ s}.$$

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου Σ_1 . Είναι: $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1$

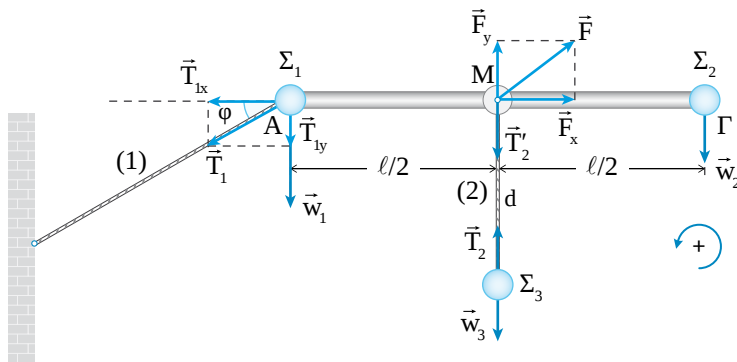
$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 10 \text{ rad}.$$

Το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$ ή $N = 5/\pi$ περιστροφές.

24. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_3 .



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(M)} = 0$ ή $\tau_{T_1} + \tau_{w_1} + \tau_F + \tau_{T_2'} + \tau_{w_2} = 0$

$$\text{ή } T_{1y} \frac{\ell}{2} + w_1 \frac{\ell}{2} + 0 + 0 - w_2 \frac{\ell}{2} = 0 \quad \text{ή } T_1 \eta \mu \phi = w_2 - w_1 \quad \text{ή } T_1 = \frac{m_2 g - m_1 g}{\eta \mu \phi} \quad \text{ή } T_1 = 20 \text{ N.}$$

Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T_2 = w_3$ ή $T_2 = m_3 g$ ή $T_2 = 50 \text{ N}$.

Είναι: $T_2' = T_2$ ή $T_2' = 50 \text{ N}$.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (1) έχουμε: $F_x - T_{1x} = 0$ ή $F_x = T_1 \sigma \nu \eta \phi$ ή $F_x = 10\sqrt{3} \text{ N}$.

Από τη σχέση (2) έχουμε: $F_y - T_{1y} - w_1 - w_2 - T_2' = 0$ ή $F_y = T_1 \eta \mu \phi + m_1 g + m_2 g + T_2'$

ή $F_y = 110 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{ή } F = 10\sqrt{124} \text{ N.}$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κοπή του

νήματος (1), είναι: $\frac{d\vec{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{w_2} + \vec{\tau}_{T_2'}$ ή, αλγεβρικά: $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{T_2'}$

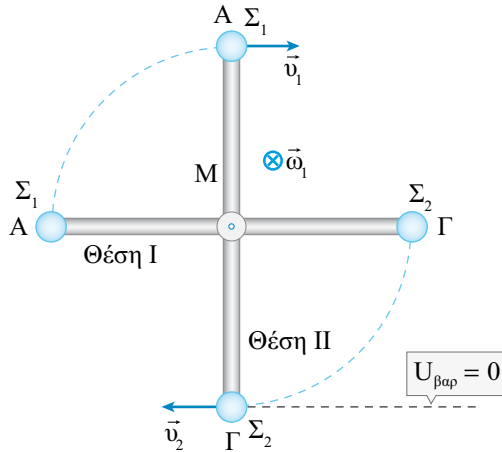
ή, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα:

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = -m_1 g \frac{\ell}{2} + m_2 g \frac{\ell}{2} + 0 \quad \text{ή } \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \quad \text{ή } \left| \frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} \right| = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι θετική, το σύστημα στρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

Τα μέτρα v_1 και v_2 των γραμμικών ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 δίνονται από τις σχέσεις: $v_1 = \omega_1 \frac{\ell}{2}$ (3) και $v_2 = \omega_1 \frac{\ell}{2}$ (4).



Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 μεταξύ των θέσεων I και II που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε: $E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}} \quad \text{ή} \quad K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$

$$\quad \text{ή} \quad 0 + m_1 g \frac{\ell}{2} + m_2 g \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_1 g \ell$$

ή, λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$(m_2 - m_1) g \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} m_1 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2} \right)^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{4(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)\ell}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 2 \text{ rad/s}$$

Έστω $L_{1,2}$ η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

Είναι: $L_{1,2} = L_1 + L_2$ (5), όπου L_1 και L_2 οι αλγεβρικές τιμές των στροφορμών των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή οι στροφορμές L_1 και L_2 έχουν φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, από τη σχέση (5) προ-

$$\text{κύπτει: } L_{1,2} = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2} \quad \text{ή} \quad L_{1,2} = m_1 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \quad \text{ή} \quad L_{1,2} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \ell^2 \omega_1$$

$$\quad \text{ή} \quad L_{1,2} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

δ. Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_3 και ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για το σύστημα που αποτελείται από το σημειακό σώμα Σ_3 και το ενιαίο σώμα που δημιουργούν η ράβδος μαζί με τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουμε: $\vec{L}_{\text{συστ(πριν)}} = \vec{L}_{\text{συστ(μετά)}}$ ή, αλγεβρικά: $L_{\rho\alpha\beta} + L_{1,2} = L_{\rho\alpha\beta} + L_{1,2} + L_3$

$$\text{ή } 0 + m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2} = 0 + m_1 v_1' \frac{\ell}{2} + m_2 v_2' \frac{\ell}{2} + m_3 v_3 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } m_1 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \omega_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m_1 \omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \omega_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_3 v_3 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)(\omega_1 - \omega_2) \frac{\ell}{2} = m_3 v_3 \quad (6).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει: $K_{\text{συστ(πριν)}} = K_{\text{συστ(μετά)}}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$\text{ή } m_1 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \left(\omega_1 \frac{\ell}{2}\right)^2 = m_1 \left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \left(\omega_2 \frac{\ell}{2}\right)^2 + m_3 v_3^2$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)(\omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{\ell^2}{4} = m_3 v_3^2 \quad (7).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (7) και (6) προκύπτει: $(\omega_1 + \omega_2) \frac{\ell}{2} = v_3 \quad (8).$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (6) και (8), προκύπτει: $v_3 = 2 \text{ m/s}$.

25. α. Η γωνία $\Delta\theta$ που έχει διαγράψει το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\Delta\theta = N 2\pi$ ή $\Delta\theta = 20\pi \text{ rad}$.

$$\text{Ισχύει: } \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\Delta\theta}{t_1^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10\pi \text{ rad/s}^2.$$

β. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 20\pi \text{ rad/s}.$$

γ. Έστω $\vec{L}_{1,2}$ η στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\vec{L}_{1,2} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ ή, αλγεβρικά: $L_{1,2} = L_1 + L_2$ ή, θεωρώντας ως θετική τη φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα: $L_{1,2} = m_1 v_1 d + m_2 v_2 (\ell - d)$ ή $L_{1,2} = m_1 \omega_1 d^2 + m_2 \omega_1 (\ell - d)^2$

$$\text{ή } L_{1,2} = [m_1 d^2 + m_2 (\ell - d)^2] \omega_1 \quad \text{ή} \quad L_{1,2} = 360\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

δ. Η στροφορμή $\vec{L}_{\text{συστ(πριν)}}$ του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $\vec{L}_{\text{συστ(πριν)}} = \vec{L}_{1,2} + \vec{L}_{\text{ράβδου}}$ ή, αλγεβρι-

$$\text{κά: } L_{\text{συστ(πριν)}} = L_{1,2} + L_{\text{ράβδου}}.$$

Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, είναι: $L_{\text{ράβδου}} = 0$, οπότε: $L_{\text{συστ(πριν)}} = L_{1,2}$

$$\text{ή } L_{\text{συστ(πριν)}} = 360\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ είναι ίση με τη ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Είναι: $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \Sigma \tau_{\text{ζεύγους}}$ ή $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = F_1 \ell \eta \mu \phi$.

Επειδή η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων είναι σταθερή, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι σταθερός. Συνεπώς, ισχύει:

$$\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\text{εξ}} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = F_1 \ell \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_1 = \frac{L_{\text{συστ(πριν)}} - 0}{\ell t_1 \eta \mu \phi} \quad \text{ή} \quad F_1 = 72\pi \text{ N}.$$

ε. Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 αμέσως μετά την κρούση. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των σωμάτων που αποτελείται από το σημειακό σώμα Σ_3 και το ενιαίο σώμα που δημιουργούν η ράβδος μαζί με τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, έχουμε: $\vec{L}_{\text{συστ(πριν)}} = \vec{L}_{\text{συστ(μετά)}}$ ή $m_1 v_1 d + m_2 v_2 (\ell - d) = m_1 v_1' d + (m_2 + m_3) v_2' (\ell - d)$

$$\text{ή} \quad m_1 \omega_1 d^2 + m_2 \omega_1 (\ell - d)^2 = m_1 \omega_2 d^2 + (m_2 + m_3) \omega_2 (\ell - d)^2$$

$$\text{ή} \quad [m_1 d^2 + m_2 (\ell - d)^2] \omega_1 = [m_1 d^2 + (m_2 + m_3) (\ell - d)^2] \omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 7,2 \pi \text{ rad/s}.$$

Επειδή το δάπεδο είναι λείο, το σύστημα της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 εκτελεί μετά την κρούση ομαλή περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_2 . Έστω $\Delta \theta'$ η γωνία που διαγράφει το σύστημα αυτό από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\Delta \theta' = \omega_2 (t_2 - t_1)$ ή $\Delta \theta' = 72\pi \text{ rad}$.

Το ζητούμενο πλήθος των περιστροφών προκύπτει: $N' = \frac{\Delta \theta'}{2\pi}$ ή $N' = 36 \text{ περιστροφές}$.

26. α. Έστω ω_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος δακτύλιος – σημειακά σώματα τη χρονική στιγμή t_1 . Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 ως προς τον άξονα $z'z$, δίνεται από τη σχέση: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ (1), όπου $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ οι στροφορμές των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 ως προς τον άξονα $z'z$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ έχουν την ίδια φορά, η σχέση (1) γράφεται:

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{ή} \quad L = m_1 v_1 R + m_2 v_2 R \quad \text{ή} \quad L = m_1 \omega_1 R^2 + m_2 \omega_1 R^2$$

$$\text{ή} \quad L = (m_1 + m_2) \omega_1 R^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 16 \text{ rad/s}.$$

β. Είναι $\omega_1 = \alpha_{\gamma \omega \nu(1)} t_1$ ή $\alpha_{\gamma \omega \nu(1)} = 8 \text{ rad/s}^2$.

γ. Είναι: $\omega = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}\Delta t$ ή $0 = \omega_1 - \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(t_2 - t_1)$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\omega_1}{t_2 - t_1}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 2 \text{ rad/s}^2$.

δ. Έστω $\Delta\theta_1$ η γωνία στροφής του συστήματος δακτύλιος – σημειακά σώματα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}(t_1 - 0)^2$ ή $\Delta\theta_1 = 16 \text{ rad}$.

Έστω $\Delta\theta_2$ η γωνία στροφής του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $\Delta\theta_2 = \omega_1\Delta t - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(\Delta t)^2$ ή $\Delta\theta_2 = \omega_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}(t_2 - t_1)^2$ ή $\Delta\theta_2 = 64 \text{ rad}$.

Το ζητούμενο πλήθος των περιστροφών είναι: $N = \frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2\pi}$ ή $N = (40/\pi)$ περιστροφές.

ε. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $\frac{d\bar{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \bar{\tau}_{\epsilon\xi}$ ή $\frac{d\bar{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \bar{\tau}_{F_1}$
ή, αλγεβρικά $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_{F_1}$ ή, θεωρώντας ως θετική τη φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα:
 $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = F_1 R$ (2).

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δακτύλιος – σημειακά σώματα είναι σταθερή στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Επομένως, η σχέση (2) γράφεται: $\frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = F_1 R$

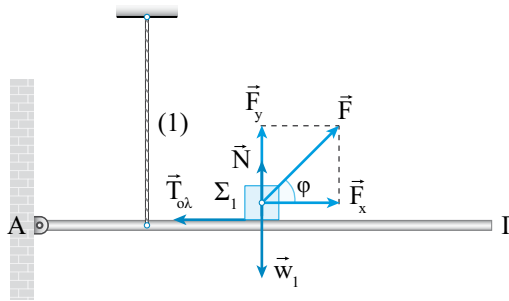
ή $\frac{L_{\text{συστ(τελ)}} - L_{\text{συστ(αρχ)}}}{t_1} = F_1 R$ ή $F_1 = \frac{L_{\text{συστ(τελ)}} - 0}{R t_1}$ ή $F_1 = \frac{L_{\text{δακτ}} + L}{R t_1}$ ή, επειδή ο δακτύλιος είναι αβαρής, $F_1 = \frac{0 + L}{R t_1}$ ή $F_1 = \frac{L}{R t_1}$ ή $F_1 = 6 \text{ N}$.

Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 για το σύστημα δακτύλιος – σημειακά σώματα ισχύει: $\frac{d\bar{L}_{\text{συστ}}}{dt} = \Sigma \bar{\tau}_{\epsilon\xi}$ ή, αλγεβρικά $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2}$ ή $\frac{dL_{\text{συστ}}}{dt} = F_1 R - F_2 R$ (3).

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι σταθερή, οπότε η σχέση

(3) γράφεται: $\frac{\Delta L_{\text{συστ}}}{\Delta t} = F_1 R - F_2 R$ ή $\frac{0 - L}{t_2 - t_1} = F_1 R - F_2 R$ ή $F_2 = F_1 + \frac{L}{R(t_2 - t_1)}$ ή $F_2 = 7,5 \text{ N}$.

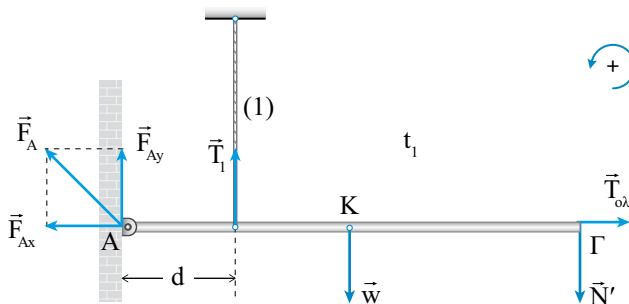
27. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της κίνησής του από το μέσον Κ της σανίδας στο άκρο της Γ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$, η δύναμη $\vec{F}$ που αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$, η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_{\text{ολ}}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη σανίδα.



Είναι: $\Sigma F_y = 0$ ή $F_y + N - w_1 = 0$ ή $N = w_1 - F_y$ ή $N = m_1 g - F \eta \mu \varphi$ ή $N = 2 \text{ N}$.

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{\text{ολ}} = \mu N$ ή $T_{\text{ολ}} = 1 \text{ N}$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα τη χρονική στιγμή t_1 είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η τάση $\vec{T}_1$ από το νήμα (1), η δύναμη $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) και η δύναμη $\vec{T}'_{\text{ολ}}$ ($\vec{T}'_{\text{ολ}} = -\vec{T}_{\text{ολ}}$) από το σώμα Σ_1 , καθώς και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση, η οποία αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F}_{Ax}$ και $\vec{F}_{Ay}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Είναι: $N' = N$ ή $N' = 2 \text{ N}$.

Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F_A} + \tau_{T_1} + \tau_w + \tau_{T'_{\text{ολ}}} + \tau_{N'} = 0$

ή $0 + T_1 d - w \frac{\ell_1}{2} + 0 - N' \ell_1 = 0$ ή $T_1 = 40 \text{ N}$.

β. Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Είναι: $T'_{\text{ολ}} = T_{\text{ολ}}$ ή $T'_{\text{ολ}} = 1 \text{ N}$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $F_{Ax} - T'_{\text{ολ}} = 0$ ή $F_{Ax} = 1 \text{ N}$.

Από τη σχέση (2), προκύπτει: $F_{Ay} + T_1 - w - N' = 0$ ή $F_{Ay} = -T_1 + Mg + N'$

ή $F_{Ay} = -22 \text{ N}$.

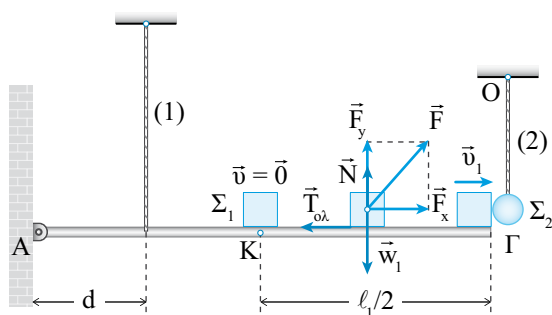
Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η συνιστώσα $\vec{F}_{Ay}$ έχει αντίθετη φορά από τη φορά που έχει σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σανίδα από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

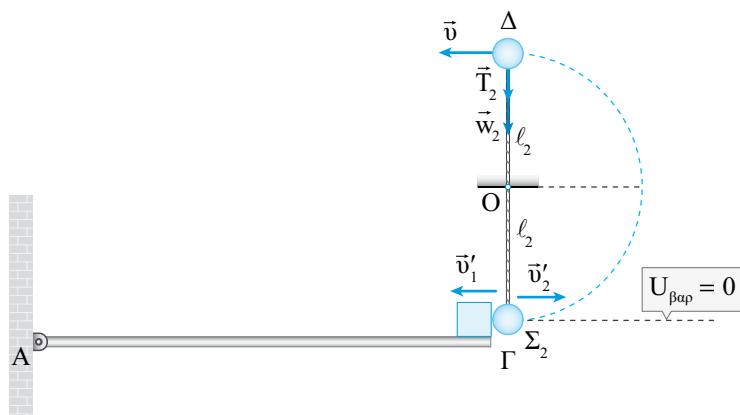
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = \sqrt{485} \text{ N.}$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_{T_{ολ}} + W_{w_1} + W_N$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = F \frac{\ell_1}{2} \cos \varphi - T_{ολ} \frac{\ell_1}{2} + 0 + 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = 10 \text{ m/s.}$$



Πριν από την κρούση



Μετά από την κρούση

Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση και $\bar{v}$ η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από το ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής τροχιάς του. Εφόσον το σώμα Σ_2 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, η τάση του νήματος (2) που ασκείται στο σώμα Σ_2

στο σημείο Δ είναι ίση με μηδέν ($T_2 = 0$). Στη θέση Δ ισχύει: $\Sigma F_{ακτ} = F_{κ}$ ή $T_2 + w_2 = m_2 \frac{v^2}{\ell_2}$
 ή $0 + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell_2}$ ή $v = \sqrt{g \ell_2}$ ή $v = \sqrt{5} \text{ m/s.}$

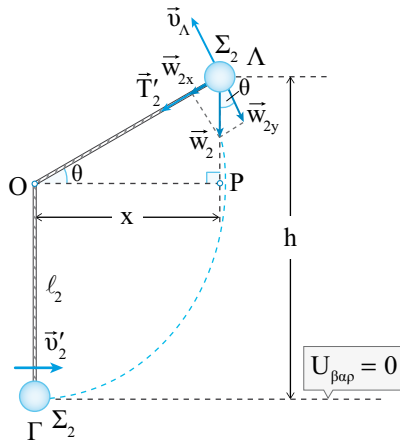
Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση μεταξύ των θέσεων Γ και Δ

$$\text{έχουμε: } E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\Delta} + U_{\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g 2\ell_2$$

$$\text{ή} \quad v_2' = 5 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 3 \text{ kg.}$$

δ. Έστω v_{Λ} το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία βρίσκεται σε ύψος h επάνω από τη θέση όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση.



Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μεταξύ των θέσεων Γ και Λ , έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Lambda)} \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\Lambda} + U_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_{\Lambda}^2 + m_2 g h$$

$$\text{ή} \quad v_{\Lambda} = \sqrt{v_2'^2 - 2gh} \quad \text{ή} \quad v_{\Lambda} = 3 \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$L = m_2 v_{\Lambda} \ell_2 \quad \text{ή} \quad L = 4,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

ε. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΡΛ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$\sin\theta = \frac{x}{\ell_2} \quad \text{ή} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\ell_2^2 - (h - \ell_2)^2}}{\ell_2} \quad \text{ή} \quad \sin\theta = 0,8.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_2 \text{ είναι: } \frac{dL}{dt} = \tau_{T_2} + \tau_{w_2} \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = 0 + w_{2x} \ell_2 \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = m_2 g \sin\theta \ell_2$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$



ΕΛΛΗΝΟ
ΕΚΔΟΤΙΚΗ

ellinoekdotiki.gr